Teoria della Misura

A.A. 2024-2025

SIMONE SACCANI

NOZIONI DI BASE

X insieme qualunque (fino a prova contraria)

DEF. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è un'**algebra** se
- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ è chiusa per unione finita, intersezione finita, complemento, cioè, se $A, B \in \mathcal{F}$, allora $A \cup B, A \cap B, A^c \in \mathcal{F}$

DEF. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una **σ-algebra** se
- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ è chiusa per unione numerabile, intersezione numerabile, complementare, cioè, se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, allora $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i, \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i, A_i^c \in \mathcal{F}$

Oss $\mathcal{F}$ chiusa per unione finita e complementare
$\Rightarrow \mathcal{F}$ chiusa per intersezione finita
Analogo per gli altri casi

esempio
- σ-algebre banali: $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$
- Dato $E \subsetneq X, E \neq \emptyset$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, E, E^c, X\}$

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{$unioni finite di intervalli (incluse semirette e punti)$\}$
è un'algebra ma non una σ-algebra (insieme di Cantor)
$\mathcal{F} = \{$unioni finite di intervalli $I = [a,b)$ o $I = (-\infty, b)\}$
è un'algebra

Oss Date $\mathcal{F}_i$ algebre (o σ-algebre), con $i \in I$, allora
$\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ è un'algebra (o σ-algebra)

Conseguenza: data $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$, esiste la più piccola algebra (o σ-algebra) $\mathcal{F}$ che contiene $\mathcal{G}$. $\mathcal{F}$ è l'algebra (o σ-algebra) generata da $\mathcal{G}$: $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$

DEF. La σ-algebra $\mathcal{M}$ su X è **generata da** $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se $\mathcal{M}$ è la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{G}$

DEF. X spazio topologico
$\mathcal{B}(X)$ **σ-algebra di Borel** è la σ-algebra generata dalla topologia τ.

- Costruzione dell'algebra $\mathcal{F}$ generata da $\mathcal{G}$

$K(\mathcal{G}) := \{$unioni finite di elementi di $\mathcal{G}$, o complementari di unioni finite$\}$
non è un'algebra

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K^n(\mathcal{G}) =: \tilde{\mathcal{G}}$$

DIMOSTRAZIONE
1. $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$ per ipotesi $\Rightarrow \mathcal{F} \supseteq K(\mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{F} \supseteq K^n(\mathcal{G})\ \forall n \Rightarrow \mathcal{F} \supseteq \tilde{\mathcal{G}}$
2. $\tilde{\mathcal{G}}$ è un'algebra, quindi $\tilde{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{F}$

Dati $A, B \in \tilde{\mathcal{G}}$, $\exists n$ t.c. $A, B \in K^n(\mathcal{G}) \Rightarrow A \cup B, A^c \in K^{n+1}(\mathcal{G}) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$ $\square$

• Costruzione della σ-algebra $\mathcal{F}$ generata da $\mathcal{G}$

$\hat{K}(\mathcal{G}) := \{$unioni numer. di elementi di $\mathcal{G}$, o complementari di unioni numer.$\}$

non è una σ-algebra

In generale $\mathcal{F} \supsetneq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \hat{K}^n(\mathcal{G})$, infatti la dimostrazione fallisce:

DIMOSTRAZIONE

1. $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$ per ipotesi $\Rightarrow \mathcal{F} \supseteq K(\mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{F} \supseteq \hat{K}^n(\mathcal{G})\ \forall n \Rightarrow \mathcal{F} \supseteq \tilde{\mathcal{G}}$
2. $\tilde{\mathcal{G}}$ è una σ-algebra

Dati $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$, $\forall i\ \exists n_i$ t.c. $A_i \in \hat{K}^{n_i}(\mathcal{G})$

ma non esiste n t.c. $A_i \in \hat{K}^n(\mathcal{G})\ \forall i$

Teorema Esiste Ω insieme bene ordinato t.c.
(i) $\forall j \in \Omega$ $\{i \in \Omega : i < j\}$ è numerabile
(ii) Ω non è numerabile

(Ω è ω_1)

Corollario Dati $i_1, i_2, \ldots \in \Omega$, $\exists j \in \Omega$ t.c. $i_1, i_2, \ldots \le j$

$\forall j \in \Omega$ pongo $\mathcal{G}_j := \hat{K}\left(\bigcup_{i<j} \mathcal{G}_i\right)$, con $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ (indico con 0 il minimo di Ω)

Allora $\mathcal{F} = \bigcup_{j\in\Omega} \mathcal{G}_j =: \tilde{\mathcal{G}}$

DIMOSTRAZIONE

1. $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$ per ipotesi $\Rightarrow \mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}_j\ \forall j \Rightarrow \mathcal{F} \supseteq \tilde{\mathcal{G}}$
2. $\tilde{\mathcal{G}}$ è una σ-algebra, quindi $\tilde{\mathcal{G}} \supseteq \mathcal{F}$

Dati $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$, $\forall n\ \exists j_n$ t.c. $A_n \in \mathcal{G}_{j_n} \Rightarrow \exists \hat{j} \in \Omega$ t.c. $\hat{j} \succ j_n\ \forall n$

$\Rightarrow A_n \in \mathcal{G}_{\hat{j}}\ \forall n \Rightarrow \bigcup_n A_n, A_n^c \in \mathcal{G}_{j'}\ \forall j' \succ \hat{j}$ □

Proposizione $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$

(In particolare, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$)

DIMOSTRAZIONE

Prendo $\mathcal{G} = \{$aperti di $\mathbb{R}\}$

Allora $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \bigcup_{j\in\Omega} \mathcal{G}_j$, $\mathcal{G}_j = \hat{K}\left(\bigcup_{i<j} \mathcal{G}_i\right)$ Claim $|\mathcal{G}_j| = 2^{\aleph_0}\ \forall j$

- $|\mathcal{G}| = 2^{\aleph_0}$
- $|\mathcal{G}_i| = 2^{\aleph_0}\ \forall i<j \Rightarrow |\mathcal{G}_j| = 2^{\aleph_0}$ (segue dalla costruzione)

Quindi $|\tilde{\mathcal{G}}| = 2^{\aleph_0}$ □

EX $\mathcal{F}$ σ-algebra finita allora $\#\mathcal{F} = 2^N$ per qualche N

EX $\mathcal{F}$ σ-algebra infinita, allora $\#\mathcal{F} \ge 2^{\aleph_0}$

EX Dato X, poniamo $\mathcal{F}_0 = \{E \subseteq X \mid E$ finito oppure E^c finito$\}$

$\mathcal{F}_1 = \{E \subseteq X \mid E$ o E^c è al più numerabile$\}$

$\mathcal{F}_2 = \{E \subseteq \mathbb{R} \mid E$ o E^c è contenuto in unione numerabile di chiusi a parte int. vuota$\}$

Dire quali tra $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ è un'algebra/σ-algebra

Dire quando $\mathcal{F}_i = \mathcal{P}(X)$

Data $\mathcal{F}$ σ-algebra su X, dato $X' \subseteq X$,
la restrizione di $\mathcal{F}$ a X' è la σ-algebra su X' data da $\mathcal{F}$
$$\mathcal{F}' := \{E \cap X' \mid E \in \mathcal{F}\}$$

Data $\mathcal{F}$ σ-algebra su X e data $f: X' \to X$,
costruisco $\mathcal{F}' = \{f^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{F}\}$: è una σ-algebra su X'
Il viceversa non funziona

Proposizione $\mathcal{B}(X)$ è generata dalle seguenti $\mathcal{G}$:
- $\mathcal{G} = \{\text{aperti}\}$
- $\mathcal{G} = \{\text{chiusi}\}$
- $\mathcal{G} = \{\text{base degli aperti}\}$ se X è II-numerabile
  (ogni aperto si scrive come unione numerabile di elementi della base)
- $\mathcal{G} = \{B_{ij} = B(x_i, r_{ij}) \mid \{x_i\} \text{ è densa in } X,\ r_{ij} \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0\}$
  se X è metrico e separabile
- $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{G} = \{\text{intervalli}\}$, $\mathcal{G} = \{\text{semirette aperte infinite a dx}\}$
- $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{G} = \{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ (intervalli diadici)
  (ogni intervallo chiuso I si scrive come intersezione numerabile di unioni finite di interv. diadici)

<u>Oss</u> Se X è uno spazio di Banach, si ha τ_f (top. forte),
τ_d (top. debole): in generale $\tau_f \supseteq \tau_d$ (uguaglianza in dim finita)
Inoltre τ_{d*} (se X è un duale) è t.c. $\tau_f \supseteq \tau_d \supseteq \tau_{d*}$
Se X^* è separabile
$$\mathcal{B}(\tau_f) = \mathcal{B}(\tau_d)$$
Infatti ($\supseteq$) chiara, ($\subseteq$) τ_f è generata dalle palle,
segue dal fatto che $B := \overline{B(0,1)} \in \mathcal{B}(\tau_d)$
e che X^* separabile $\Rightarrow$ X separabile.
Il fatto vale perché $B = \{x \in X \mid \lambda(x) \leq \|\lambda\| \ \forall \lambda \in D \text{ numerabile denso in } X^*\} =$
$$= \bigcap_{\lambda \in D} \underbrace{\{x \in X \mid \lambda(x) \leq \|\lambda\|\}}_{\in \tau_d} \qquad \Rightarrow B \in \mathcal{B}(\tau_d)$$
Se X è duale ed è separabile
$$\mathcal{B}(\tau_f) = \mathcal{B}(\tau_d) = \mathcal{B}(\tau_{d*})$$
(analogo considerando D nel preduale:
$$B = \{x \in X \mid \langle x, y \rangle \leq \|y\|, \forall y \in D\} = \bigcap_{y \in D} \underbrace{\{x \in X \mid \langle x, y \rangle \leq \|y\|\}}_{\in \tau_{d*}})$$
Questo non vale ad esempio nello spazio delle misure

Misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$

DEF. $\forall A$ aperto $\mathcal{L}^1(A) = \sup\{ \sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| \mid \{I_i\}$ famiglia disgiunta finita di intervalli (chiusi) contenuti in $A \}$

DEF. $E \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile secondo Lebesgue se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$ aperto $\exists C$ chiuso t.c. $C \subseteq E \subseteq A$ e $\mathcal{L}^1(A \setminus C) \leq \varepsilon$

$\mathcal{M}_{Leb}$ è l'insieme dei misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$

EX Dimostrare che $\mathcal{M}_{Leb}$ è una σ-algebra
Inoltre $\mathcal{L}^1([a,b]) = b-a$

Oss $\mathcal{M}_{Leb}(\mathbb{R}) \supsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ poiché $\mathcal{M}_{Leb} \supseteq \{\text{intervalli}\}$
Il contenimento stretto segue da $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$ e $|\mathcal{M}_{Leb}| = 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$
Questo segue da $\mathcal{L}^1(E) = 0 \Rightarrow E' \in \mathcal{M}_{Leb}$ $\forall E' \subset E$, $\mathcal{L}^1(E') = 0$
Applicandolo all'insieme di Cantor, quindi $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{M}_{Leb} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$

DEF. Data $\mathcal{M}$ σ-algebra su X, $(X, \mathcal{M})$ si dice spazio misurabile

DEF. Dati $(X, \mathcal{M})$ e $(X', \mathcal{M}')$ spazi misurabili e $f : X \to X'$, dico che f è misurabile se
$$f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \quad \forall E \in \mathcal{M}'$$

NOTA Se X' spazio topologico $\mathcal{M}' = \mathcal{B}(X')$
f è misurabile $\iff f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ $\forall E$ aperto
Se considero f "da integrare" (quindi $X' = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ o Banach) il default è che $\mathcal{M}' = \mathcal{B}(X')$

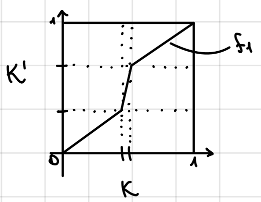
Oss $f : X \to X'$ continua, con X, X' spazi topologici, allora f è misurabile se $\mathcal{M}' = \mathcal{B}(X')$ e $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(X)$

EX Esiste $f : I \to I$, $I = [0,1]$ omeomorfismo non misurabile se $\mathcal{M} = \mathcal{M}' = \mathcal{M}_{Leb}$

SOL Prendo $K \subseteq I$ compatto "tipo Cantor" con $\mathcal{L}^1(K) > 0$, prendo K' Cantor
Costruisco $f : I \to I$ omeomorfismo t.c. $f(K) = K'$
Siccome $\mathcal{L}^1(K) > 0$, $\exists E \subset K$ non misurabile secondo Leb.
$E' := f(E) \subseteq K'$ e $\mathcal{L}^1(K') = 0 \Rightarrow E'$ è misurabile, ma $f^{-1}(E') = E$

- $K = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n$, K_0 = intervallo chiuso, K_n = unione di 2^n intervalli chiusi ottenuti rimuovendo un intervallo aperto da ciascun intervallo di K_{n-1}

$K = K_0 \setminus \bigcup_{\substack{n=0,\dots \\ j=1,\dots,2^n}} I_j^n \Rightarrow \mathcal{L}^1(K) = \mathcal{L}(K_0) - \sum_{n,j} \mathcal{L}^1(I_j^n)$



$\forall n$ costruisco f_n omeo crescente affine a tratti t.c. $f_n(K_n) = K'_n$
Prendo $f = \lim f_n$

Proposizione Se $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X')$ genera $\mathcal{M}'$, allora
f è misurabile $\iff$ $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ $\forall E \in \mathcal{G}$

DIMOSTRAZIONE

($\Longrightarrow$) ovvio

($\Longleftarrow$) Sia $\mathcal{F} := \{E \subseteq X' \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\} \supseteq \mathcal{G}$

Basta verificare che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra

$E \in \mathcal{F} \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \Rightarrow f^{-1}(E)^c = f^{-1}(E^c) \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{F}$

$E_i \in \mathcal{F} \Rightarrow f^{-1}(E_i) \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_i f^{-1}(E_i) = f^{-1}(\bigcup_i E_i) \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_i E_i \in \mathcal{F}$ $\square$

Corollario Se X' spazio topologico, $\mathcal{M}' = \mathcal{B}(X')$, allora sono fatti equivalenti:
- f è misurabile
- $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ $\forall A$ aperto
- $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ $\forall A \in \mathcal{G}$ generatori dei boreliani

DEF. Se X, X' sono spazi topologici, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{M}' = \mathcal{B}'(X')$, una funzione $f: X \longrightarrow X'$ misurabile si dice **boreliana**

<u>Proprietà</u>

X, X', X'' spazi misurabili

$X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{g} X''$

- Se f e g sono misurabili, allora $g \circ f$ è misurabile
- Se X, X' spazi topologici e $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{M}' = \mathcal{B}(X')$, allora f continua $\Longrightarrow$ f misurabile

  In particolare, le funzioni continue sono boreliane

DEF. Dati $(X, \mathcal{M})$, $(X', \mathcal{M}')$ spazi misurabili, la **σ-algebra prodotto** $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}'$ è la σ-algebra su $X \times X'$ generata da $\{E \times E' \mid E \in \mathcal{M}, E' \in \mathcal{M}'\}$

<u>Oss</u> Se X, X' spazi topologici II-numerabili, $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X') = \mathcal{B}(X \times X')$

DIMOSTRAZIONE

($\subseteq$) $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X')$ è la σ-algebra generata da $\{E \times E' \mid E \in \mathcal{B}(X), E' \in \mathcal{B}(X')\}$

ma anche $\{E \times E' \mid E, E' \text{ aperti}\} \subset \tau(X \times X') \subset \mathcal{B}(X \times X')$

($\supseteq$) Mi basta far vedere $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X') \supseteq \tau(X \times X')$

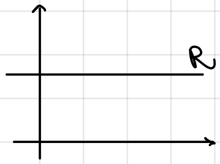
quindi basta $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X') \supseteq \{E \times E' \mid E, E' \text{ aperti}\}$, che è vero. $\square$

Oss $\mathcal{M}_{Leb}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{M}_{Leb}(\mathbb{R}^{n'}) \subsetneq \mathcal{M}_{Leb}(\mathbb{R}^{n+n'})$

DIMOSTRAZIONE

($\subseteq$) **Lemma** Dati $E \in \mathcal{M}_{Leb}(\mathbb{R}^n), E' \in \mathcal{M}_{Leb}(\mathbb{R}^{n'})$, $\mathcal{L}^n(E), \mathcal{L}^{n'}(E') < +\infty$
allora $E \times E' \in \mathcal{M}_{Leb}(\mathbb{R}^{n+n'})$

($\neq$)



Ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile secondo Leb. in $\mathbb{R}^2$
Prendo $E \subseteq \mathbb{R}$ non mis. secondo Leb. in $\mathbb{R}$
$E \notin \mathcal{M}_{Leb}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}_{Leb}(\mathbb{R}^{n'})$: se lo fosse la sua proiezione su $\mathbb{R}$ sarebbe misurabile

DEF. $\{(X_i, \mathcal{M}_i)\}_{i\in I}$, I famiglia infinita
La σ-algebra prodotto su $X := \prod_{i\in I} X_i$ è
la σ-algebra generata da $\{\prod_{i\in I} E_i \mid E_i \in \mathcal{M}_i \ \forall i, E_i = X_i$ per ogni i tranne un numero finito$\}$

EX La σ-algebra prodotto è la più piccola per cui le proiezioni $\pi_i : X \to X_i$ sono misurabili

EX Dati $(X, \mathcal{M})$, $(X_1', \mathcal{M}_1')$, $(X_2', \mathcal{M}_2')$ e $f: X \to X_1' \times X_2'$
f è misurabile $\iff$ le componenti f_i sono misurabili

D'ora in poi $X' = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ oppure Banach e $\mathcal{M}' = \mathcal{B}(X')$

Proposizione Sia $\mathcal{F}(X, X') = \{f : X \to X' \text{ misurabile}\}$.
Allora $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto alle seguenti operazioni
(1) composizione con $g: X' \to X''$ boreliana
$f \in \mathcal{F}(X, X') \implies g \circ f \in \mathcal{F}(X, X'')$
(2) somma, prodotto (se $X = \mathbb{R}$)
(3) inf e sup di sottofamiglie numerabili (se $X' = \overline{\mathbb{R}}$)
(4) liminf, limsup di successioni di funzioni (se $X' = \overline{\mathbb{R}}$)
(5) limite di successioni di funzioni
(6) serie

Estensioni: vedere quali estensioni valgono
(In particolare riguardo a X' in (1), (5))
Come modificare (5) se $\lim f_n(x)$ esiste solo per $x \in E \subsetneq X$
R E è misurabile e $f: E \to X'$ è misurabile

DIMOSTRAZIONE

(2) Date $f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabili,

allora $(f_1, f_2) : X \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ è misurabile

Inoltre $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ boreliana

$\Longrightarrow f_1 + f_2 = S \circ (f_1, f_2)$ è misurabile

Se $X' = \mathbb{R}$, (4), (5), (6) seguono da (3)

(3) $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabili, $f(x) := \sup_n f_n(x) \ \forall x$

$f^{-1}((a, +\infty]) = \bigcap_n f_n^{-1}((a, +\infty])$ è misurabile

$\Longrightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \ \forall E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ (le semirette generano $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$)

Altrimenti, prendo $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, $f = (f_1, f_2, \dots)$ misurabile

$S : \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $S(x_0, x_1, \dots) = \sup x_n$ è boreliana

$\Longrightarrow \sup f_n = S(f_0, f_1, \dots) = S \circ f$ è misurabile $\square$

<u>Oss</u> (3) non vale per famiglie più che numerabili

esempio $X = \mathbb{R}$ $f = \mathbb{1}_E$ con $E \notin \mathcal{M}_{Leb}$

$f(x) = \sup_{y \in E} \delta_x(y)$ $\hookrightarrow$ misurabile $\forall y$

<u>EX</u> Se $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{M}' = \mathcal{B}(X')$, $f : X \longrightarrow X'$ è misurabile se

(1) f è continua

(2) f è s.c.i. $(X' = \overline{\mathbb{R}})$

(3) f è s.c.s. $(X' = \overline{\mathbb{R}})$

<u>EX</u> $f_i : E_i \longrightarrow X'$, $E_i \in \mathcal{M}$, $\{E_i\}$ partizione numerabile di X

$f : X \longrightarrow X'$, $f(x) = f_i(x)$ con i t.c. $x \in E_i$ $\Longrightarrow f$ è misurabile

Misure

Def. X insieme, $\mathcal{F}$ algebra su X
$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0,+\infty]$ è una misura additiva (positiva) se
(1) $\mu(\emptyset)=0$
(2) $E_1, E_2 \in \mathcal{F},\ E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ (additività)

Oss (1) segue da (2) se $\mu(E)<+\infty$, poiché $\mu(E) = \mu(E \cup \emptyset) = \mu(E) + \mu(\emptyset) \Rightarrow \mu(\emptyset)=0$

Conseguenze.
(3) $E_1, E_2 \in \mathcal{F},\ E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mu(E_1) \le \mu(E_2)$ (monotonia)
(4) $E_1, E_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \mu(E_1 \cup E_2) \le \mu(E_1) + \mu(E_2)$ (sub-additività)

Def. X insieme, $\mathcal{M}$ σ-algebra su X
$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0,+\infty]$ è una misura σ-additiva (positiva) se
(1) $\mu(\emptyset)=0$
(2) $\{E_n\} \subseteq \mathcal{M}$ disgiunta numerabile $\Rightarrow \mu(\bigcup_n E_n) = \sum_n \mu(E_n)$ (σ-additività)

Conseguenze
(3) $E_1, E_2 \in \mathcal{M},\ E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mu(E_1) \le \mu(E_2)$ (monotonia)
(4) $\{E_n\} \subseteq \mathcal{M}$ numerabile $\Rightarrow \mu(\bigcup_n E_n) \le \sum_n \mu(E_n)$ (σ-subadditività)
(5) $\{E_n\} \subseteq \mathcal{M},\ E_n \nearrow E \Rightarrow \mu(E) = \sup_n \mu(E_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$
(6) $\{E_n\} \subseteq \mathcal{M},\ E_n \searrow E,\ \exists \bar{n}.\ \mu(E_{\bar{n}})<+\infty \Rightarrow \mu(E) = \inf_n \mu(E_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$

esempio $E_n = [n,+\infty),\ E_n \searrow \emptyset,\ \mathcal{L}^1(E_n) = +\infty$ ma $\mathcal{L}^1(\emptyset)=0$

Proposizione (1) Sia $\mathcal{M}$ algebra di insiemi in X chiusa per unione crescente numerabile (se $\{E_n\} \subseteq \mathcal{M}, E_n \nearrow E \Rightarrow E \in \mathcal{M}$), allora $\mathcal{M}$ è una σ-algebra
(2) Sia $\mathcal{M}$ σ-algebra e μ misura additiva su $\mathcal{M}$ che soddisfa (5), allora μ è σ-additiva

DIMOSTRAZIONE
(1) Sia $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$: definisco $F_n := \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, per cui $F_i \nearrow F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$
Quindi $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathcal{M}$.
(2) Sia $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ disgiunti: definisco $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \nearrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i =: E \in \mathcal{M}$.
Per (5), $\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n) \underset{\mu \text{ add}}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$. $\square$

esempio (1) X insieme, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $\bar{x} \in X$

$$\delta_{\bar{x}}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{x} \in E \\ 0 & \text{se } \bar{x} \notin E \end{cases} \qquad \text{(delta di Dirac)}$$

(2) X insieme, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, la misura che conta i punti è

$$\mu(E) := \#E = \begin{cases} |E| & \text{se } E \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } E \text{ è infinito} \end{cases}$$

(3) X insieme, $\mathcal{J}$ σ-ideale di $\mathcal{P}(X)$ (cioè $\mathcal{J}$ è chiuso rispetto a unione numerabile e sottoinsiemi)

esempio insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, insiemi numerabili

$$\mu(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E \in \mathcal{J} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

DEF. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ si dice spazio di misura.

DEF. Se $\mu(X) = 1$, μ si dice misura di probabilità.

DEF. Si dice che una proposizione $P(x)$, $x \in X$, vale μ-q.o. o μ-q.o. $x \in X$ se $\mu(\{x \mid P(x) \text{ non vale}\}) = 0$
In probabilità, si dice che $P(x)$ è quasi certamente vera.

Operazioni sulle misure

- Restrizione di μ a $F \in \mathcal{M}$ è una misura $\mu \llcorner F$ su $\mathcal{M}$ data da
  $(\mu \llcorner F)(E) := \mu(E \cap F)$

  Combinazioni lineari con coefficienti positivi:
  μ_1, μ_2 misure su $\mathcal{M}$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, si pone
  $(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)(E) := \lambda_1 \mu_1(E) + \lambda_2 \mu_2(E)$
- Somma numerabile: date $\{\mu_n\}$ misure su $\mathcal{M}$, si definisce
  $\mu = \sum_n \mu_n$ data da $\mu(E) := \sum_n \mu_n(E)$
- Somma di famiglia qualunque $\sum_{i \in I} \mu_i$ di misure su $\mathcal{M}$
  (memento: data $\{a_i \mid i \in I\}$, $\sum_{i \in I} a_i = \sup_{\substack{J \subseteq I \\ J \text{ finito}}} \{a_i, i \in J\}$)
- Inviluppo superiore di famiglia qualunque $\{\mu_i\}_{i \in I}$ di misure su $\mathcal{M}$ è la misura $\mu = \bigvee_{i \in I} \mu_i$ data da
  $\mu(E) = \sup \{ \sum_i \mu_i(E_i) \mid \{E_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{M} \text{ partizione numerabile di } E \}$
  $\hookrightarrow E_i = \emptyset$ tranne una quantità numerabile di indici

(1) μ è una misura su $\mathcal{M}$:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ ovvio

(ii) $\{E_n\} \subseteq \mathcal{M}$ famiglia disgiunta con $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$

($\leq$) Sia $\{E_i\}$ una partizione ammissibile di E.
Allora $\forall n$ $\{E_i^n := E_i \cap E_n \mid i \in I\}$ è una partizione ammissibile di E_n, quindi
$\sum_i \mu_i(E_i) = \sum_i \sum_n \mu_i(E_i^n) = \sum_n \sum_i \mu_i(E_i^n) \leq \sum_n \mu(E_n)$
Prendendo il sup sulle partizioni ammissibili: $\mu(E) \leq \sum_n \mu_n(E_n)$

($\geq$) $\forall n$ sia $\{E_i^n \mid i \in I\}$ una partizione ammissibile di E_n
Allora $\{E_i := \bigcup_n E_i^n \mid i \in I\}$ è una partizione ammissibile per E e quindi
$\mu(E) \geq \sum_i \mu_i(E_i) = \sum_i \sum_n \mu_i(E_i^n) = \sum_n \sum_i \mu_i(E_i^n)$
Passando al sup sulle partizioni ammissibili $\{E_i^n\}$, ottengo $\mu(E) \geq \sum_n \mu_n(E_n)$.

(2) Data $\tilde{\mu}$ misura su $\mathcal{M}$ t.c. $\tilde{\mu} \geq \mu_i \ \forall i \in I$, allora $\tilde{\mu} \geq \mu$

Sia $\tilde{\mu} \geq \mu_i$ e sia $E \in \mathcal{M}$. Sia $\{E_n\} \subseteq \mathcal{M}$ una partizione ammissibile di E

Allora $\tilde{\mu}(E) = \sum_n \tilde{\mu}(E_n) \geq \sum_n \mu_n(E_n)$.

Passando al sup sulle partizioni ammissibili, si ottiene

$\tilde{\mu}(E) \geq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(E) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}$.

esempio $\tilde{\mu}(E) := \sup_{i \in I} \mu_i(E)$ in generale non è una misura

Ad esempio, $X = \{a,b\}$, $\mu_1 = \delta_a$, $\mu_2 = \delta_b$, $\mu := \sup\{\mu_1, \mu_2\}$

Allora $\mu(E) = 1 \ \forall E \neq \emptyset$ ma

$1 = \mu(X) = \mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) = 2$ ↯

- Inviluppo inferiore di famiglia qualunque $\{\mu_i\}_{i \in I}$ di misure su $\mathcal{M}$ è la misura $\mu = \bigwedge_{i \in I} \mu_i$ data da

$\mu(E) = \inf\{\sum_i \mu_i(E_i) \mid \{E_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{M} \text{ partizione numerabile di } E\}$

In modo analogo, μ è una misura su $\mathcal{M}$ e se $\tilde{\mu}$ è una misura su $\mathcal{M}$ t.c. $\tilde{\mu} \leq \mu_i \ \forall i$, allora $\tilde{\mu} \leq \mu$.

Def. μ è **finita** se $\mu(X) < +\infty$

μ è **σ-finita** se $\exists \{E_n\} \subseteq \mathcal{M}$ t.c. $\bigcup_n E_n = X$ e $\mu(E_n) < +\infty \ \forall n$

La **massa** di μ è $\mathbb{M}(\mu) = \|\mu\| := \mu(X)$

Def. $E \in \mathcal{M}$ è un **atomo** di μ se $\mu(E) > 0$ e $\forall E' \in \mathcal{M}, E' \subset E$ vale $\mu(E') = 0$ oppure $\mu(E \setminus E') = 0$.

μ si dice **non atomica** se non esistono atomi;

μ si dice **puramente atomica** se ogni $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) > 0$ contiene un atomo.

esempio
- la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ non ha atomi.
- la misura che conta i punti è puramente atomica.

Oss Sia $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ σ-algebra che contiene $\mathcal{B}(X)$, μ misura finita.

Allora μ è non atomica sse $\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (analogo per $X = \mathbb{R}^n$).

DIMOSTRAZIONE

($\Longrightarrow$) Chiaro.

($\Longleftarrow$) Sia $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) > 0$. Definisco $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mu((-\infty, x] \cap E)$.

Poiché $\mu(\{x\}) = 0 \ \forall x$, f è continua. Vale $f(-\infty) = 0$ e $f(+\infty) = \mu(E) > 0$.

Per il Teorema dei valori intermedi, $\exists E' \subset E$ t.c. $0 < \mu(E') < \mu(E)$. $\square$

Oss L'enunciato non vale se $\mathcal{M}$ contiene solo i punti.

$\mathcal{M} = \sigma(\{x\})$ $\quad \mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } |E| = \aleph_0 \\ 1 & \text{se } |X \setminus E| = \aleph_0 \end{cases}$

Se $|X \setminus E| = \aleph_0$, E è un atomo

Def. X spazio topologico, $\mathcal{M} \supset \mathcal{B}(X)$.

μ è **localmente finita** se $\forall x \in X \ \exists U_x$ intorno di x t.c. $\mu(U_x) < +\infty$

esempio $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{\frac{1}{n}}$ su $X = \mathbb{R}$ è σ-finita $(X = (-\infty, 0] \cup \bigcup_{n \geq 1} [\frac{1}{n}, +\infty))$

ma non è localmente finita: $\mu(U_0) = +\infty \ \forall U_0$ intorno di 0

esempio $\mu = \#$ su X, con $|X| > \aleph_0$, dotato della topologia discreta, è localmente finita ma non σ-finita

Oss Se X è II-numerabile, μ localmente finita $\Rightarrow$ μ σ-finita.

DIMOSTRAZIONE

Per ogni $x \in X$, $\exists U_x$ intorno aperto di x tc $\mu(U_x) < +\infty$

Poiché X è II-num, $\exists \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aperti t.c. $\forall x \in X$ $U_x = \bigcup_j E_{n_j}$

In particolare, $\mu(E_n) < +\infty$ $\forall n$ e $\bigcup E_n = X$ $\Longrightarrow$ μ σ-finita. $\square$

Oss Se $X = \mathbb{R}^n$, μ è localmente finita $\Longleftrightarrow$ $\mu(B(0,n)) < +\infty$ $\forall n$

DIMOSTRAZIONE

$(\Leftarrow)$ Chiaro: $\forall x \in B(0,n)$ per n abbastanza grande

$(\Rightarrow)$ μ loc. finita $\Rightarrow$ μ finita sui compatti

$\Rightarrow$ $\mu(B(0,n)) \leq \mu(\overline{B(0,n)}) < +\infty$ $\square$

DEF. μ è di Borel se X è spazio topologico e $\mathcal{M} = \mathcal{B}(X)$.

DEF. X spazio topologico

μ si dice Borel-regolare se

$\forall E \in \mathcal{M}$ $\exists E_1, E_2 \in \mathcal{B}(X)$ t.c. $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$ e $\mu(E_2 \setminus E_1) = 0$

DEF. X spazio topologico

μ si dice esternamente regolare (con aperti) se $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}$

e $\forall E \in \mathcal{M}$ $\mu(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \text{ aperto}, E \subseteq A\}$

μ si dice internamente regolare (con compatti) se $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}$

e $\forall E \in \mathcal{M}$ $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ compatto}, K \subseteq E\}$

DEF. μ si dice misura di Radon se

$\mathcal{M} = \mathcal{B}(X)$, μ finita sui compatti, μ regolare dall'interno (con compatti) e dall'esterno (con aperti).

> **Teorema** Sia X spazio metrico separabile localmente compatto, μ misura di Borel localmente finita, allora μ è internamente ed esternamente regolare.

DEF. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ si dice completo se

$\forall E \subset E'$ con $E' \in \mathcal{M}$, $\mu(E') = 0$ $\Longrightarrow$ $E \in \mathcal{M}$

Data μ, considero il σ-ideale

$$\mathcal{J}_\mu = \{E \subseteq X \mid \exists E' \in \mathcal{M} \text{ t.c. } E \subseteq E', \mu(E') = 0\}$$

Equivalentemente, μ è completa se $\mathcal{J}_\mu \subseteq \mathcal{M}$

esempio $\mathcal{L}^d$ è completa su $\mathcal{M}_{Leb}$, non è completa su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Oss Se μ su $\mathcal{M}$ non è completa, si può estendere a $\tilde{\mu}$ su $\tilde{\mathcal{M}}$ in modo che $\tilde{\mu}$ sia una misura completa su $\tilde{\mathcal{M}}$.
Definiamo il completamento di $(\mathcal{M},\mu)$ come $(\overline{\mathcal{M}},\overline{\mu})$ con
$\overline{\mathcal{M}} := \{E \subseteq X \mid \exists E' \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{Z}_\mu : E = E' \cup N\}$, $\overline{\mu}(E) := \mu(E')$
(equivalentemente $\overline{\mathcal{M}} = \{E \subseteq X \mid \exists E' \in \mathcal{M} : E \Delta E' \in \mathcal{Z}_\mu\}$)

Proposizione (a) $\overline{\mathcal{M}}$ è una σ-algebra e $\overline{\mu}$ è una misura su $\overline{\mathcal{M}}$, con $\overline{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$
(b) $(X,\overline{\mathcal{M}},\overline{\mu})$ è completo.
(c) $\forall E \in \overline{\mathcal{M}}$ esistono $E', E'' \in \mathcal{M}$ t.c. $E' \subset E \subset E''$
e $\mu(E'' \setminus E') = 0 \implies \overline{\mu}(E) = \mu(E') = \mu(E'')$
(d) $(X,\overline{\mathcal{M}},\overline{\mu})$ è la più piccola estensione completa di $(X,\mathcal{M},\mu)$

DIMOSTRAZIONE
(a) • $\emptyset \in \tilde{\mathcal{M}}$
• $E \in \tilde{\mathcal{M}}$: $E = E' \cup N$, con $N \in \mathcal{Z}_\mu \implies \exists N' \in \mathcal{M}$ con $N \subseteq N'$, $\mu(N') = 0$
Possiamo supporre $E' \cap N' = \emptyset$ (altrimenti sostituisco N, N' con $N \setminus E', N' \setminus E'$)
Quindi $E = E' \cup N = (E' \cup N') \cap (N'^c \cup N)$, da cui
$$E^c = (E' \cup N')^c \cup (N'^c \cup N)^c = \underbrace{(E' \cup N')^c}_{\in\mathcal{M}} \cup \underbrace{(N' \setminus N)}_{\in \mathcal{Z}_\mu} \in \tilde{\mathcal{M}}$$
• $\{E_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{M}}$: $E_n = E_n' \cup N_n$ con $N_n \subseteq N_n'$, $\mu(N_n') = 0 \implies \bigcup_n E_n = \underbrace{\bigcup_n E_n'}_{\in\mathcal{M}} \cup \underbrace{\bigcup_n N_n}_{\subseteq \bigcup_n N_n'} \in \tilde{\mathcal{M}}$ e $\mu(\bigcup_n N_n') = 0$
• $\tilde{\mu}$ è ben definita :
se $E_1 \cup N_1 = E_2 \cup N_2$, con $N_i \subseteq N_i'$, allora $E_1 \subseteq E_2 \cup N_2' \implies \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.
Per simmetria $\mu(E_1) = \mu(E_2)$
• $\tilde{\mu}$ è una misura: chiaro
(b) $\tilde{\mu}$ è completa: sia $E' \in \tilde{\mathcal{M}}$ con $\tilde{\mu}(E') = 0 \implies E' = E \cup N$, con $N \subseteq N'$ e $\mu(E) = \mu(N') = 0$.
Quindi anche $\mu(E \cup N') = 0$. Dato $F \subset E'$, posso scrivere
$F = \emptyset \cup F$ con $\emptyset \in \mathcal{M}$, $F \subseteq E \cup N'$ e $\mu(E \cup N') = 0 \implies F \in \tilde{\mathcal{M}}$
(c) Dato $E \in \overline{\mathcal{M}}$, $\exists E' \in \mathcal{M}, N$ con $N \subseteq N'$, $\mu(N') = 0$ t.c. $E = E' \cup N$
Quindi $E' \subseteq E \subseteq E' \cup N' =: E'' \in \mathcal{M}$ e $\mu(E'' \setminus E') \leq \mu(N') = 0$.
(d) Sia $(X,\tilde{\mathcal{M}},\tilde{\mu})$ un'estensione completa di $(X,\mathcal{M},\mu)$: $\tilde{\mathcal{M}} \supseteq \mathcal{M}$, $\tilde{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$.
Sia $E \in \overline{\mathcal{M}}$: $E = E' \cup N$ con $E' \in \mathcal{M}$, $N \subseteq N' \in \mathcal{M}$, $\mu(N') = 0$.
Allora $E \setminus E' = N \setminus E' \subseteq N \subseteq N'$. Poiché $\tilde{\mathcal{M}}$ è completa, $E \setminus E' \in \tilde{\mathcal{M}}$
Quindi $E = (E \setminus E') \cup E' \in \tilde{\mathcal{M}} \implies \overline{\mathcal{M}} \subseteq \tilde{\mathcal{M}}$
Sia ora $F = E \cup N \in \overline{\mathcal{M}}$, $N \subseteq N'$, $\mu(N') = 0$:
$$\mu(E) = \tilde{\mu}(E) \leq \tilde{\mu}(F) \leq \tilde{\mu}(E \cup N') \leq \tilde{\mu}(E) + \tilde{\mu}(N') = \mu(E) + \mu(N') = \mu(E)$$
$$\implies \tilde{\mu}(F) = \mu(E) = \overline{\mu}(F).$$
□

NOTA Completare una misura non è un'operazione particolarmente significativa o utile dal punto di vista delle applicazioni della teoria della misura.
Vale infatti il seguente:

Lemma Sia $(X,\overline{\mathcal{M}},\overline{\mu})$ estensione di $(X,\mathcal{M},\mu)$ tale che $\forall E\in\overline{\mathcal{M}}$ $\exists E',E''\in\mathcal{M}$ t.c. $E'\subset E\subset E''$ e $\mu(E''\setminus E')=0$.
Allora $\forall f: X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mathcal{M}}$-misurabile esiste $\tilde{f}: X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{M}$-misurabile t.c. $f=\tilde{f}$ $\overline{\mu}$-q.o.

DIMOSTRAZIONE

Mi basta mostrarlo per le funzioni semplici.
Sia $s(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, con $a_i\in\overline{\mathbb{R}}$, $A_i\in\overline{\mathcal{M}}$: s è $\overline{\mathcal{M}}$-misurabile.
Per ipotesi, $\exists A_i'\subset A_i$, con $A_i'\in\mathcal{M}$ t.c. $\mu(A_i')=\overline{\mu}(A_i')=\overline{\mu}(A_i)$.
Allora $\tilde{s}(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i'}$ è $\mathcal{M}$-misurabile e $s=\tilde{s}$ $\overline{\mu}$-q.o. $\square$

Oss In particolare, gli spazi L^p costruiti su $(X,\mathcal{M},\mu)$ e su $(X,\overline{\mathcal{M}},\overline{\mu})$ coincidono

costruzione di insiemi non misurabili

Sia X spazio topologico T_2 tale che $\mathcal{K}=\{K\subseteq X \text{ compatto}\}$ ha cardinalità $\leq |\mathbb{R}|$
(ad esempio se X è II-numerabile)
$\mathcal{M}$ σ-algebra su X, $\mathcal{M}\supseteq \mathcal{B}(X)$
μ misura di probabilità su $\mathcal{M}$ <u>internamente regolare</u> e <u>non atomica</u>
Allora $\mathcal{M}\subsetneq \mathcal{P}(X)$. Anzi esiste $F\subset X$ t.c.

$\forall E\in\mathcal{M}$ vale $E\subseteq F \Rightarrow \mu(E)=0$, $F\subseteq E\Rightarrow \mu(E)=1$ $\quad(*)$

DIMOSTRAZIONE

$(*)$ equivale a $\forall K\in\mathcal{K}$ vale $K\subset F\Rightarrow \mu(K)=0$, $K\subset F^c \Rightarrow \mu(K)=0$
che equivale a $\forall K\in\mathcal{K}$ con $\mu(K)>0$ $\quad K\not\subset F$, $K\not\subset F^c$, cioè $K\cap F^c\neq\emptyset$, $K\cap F\neq\emptyset$
Costruisco F e F' disgiunti t.c. $\forall K\in\mathcal{K}$ con $\mu(K)>0$, $K\cap F\neq\emptyset$, $K\cap F'\neq\emptyset$
<u>Idea</u>: se $\mathcal{K}$ è numerabile, siano K_i i compatti con $0<\mu(K_i)<1$
costruisco $F=\{x_i\}$, $F'=\{x'_i\}$ per ricorsione
prendo $x_i, x'_i\in K_i\setminus\{x_j,x'_j \mid j<i\}$ t.c. $x_i\neq x'_i$
La costruzione funziona se $K_i\setminus\{x_j,x'_j\mid j<i\}$ è infinito,
che vale poiché K_i infinito, dato che $\mu(K_i)>0$ (μ non atomica)
Sia Ω il primo ordinale con cardinalità del continuo, cioè
Ω insieme bene ordinato t.c. $|\Omega|=2^{\aleph_0}=|\mathcal{K}|$ e
$\forall i\in\Omega$ $\quad |\{j\in\Omega \mid j<i\}|<2^{\aleph_0}$. Quindi $\{K\in\mathcal{K}\mid \mu(K)>0\}=\{K_i\}_{i\in\Omega}$
Costruisco $F=\{x_i\}_{i\in\Omega}$, $F'=\{x'_i\}_{i\in\Omega}$ per ricorsione transfinita
prendo $x_i, x'_i\in K_i\setminus\{x_j,x'_j\mid j<i\}$ t.c. $x_i\neq x'_i$
La costruzione funziona se $K_i\setminus\{x_j,x'_j\mid j<i\}$ ha almeno due punti,
che vale perché K_i ha cardinalità almeno del continuo (per il Lemma 3) $\square$

Lemma 1 Sia X II-numerabile, μ misura non atomica su $\mathcal{B}(X)$, $\mu(X)>0$. Allora $\exists E_1,E_2\in\mathcal{B}(X)$, $E_1\cap E_2=\emptyset$ t.c. $\mu(E_1)>0$, $\mu(E_2)>0$

DIMOSTRAZIONE

Poiché $\mu(X)>0$ e μ non atomica, $\exists E_1\in\mathcal{B}(X)$ t.c. $0<\mu(E_1)<\mu(X)$.
Quindi $E_2:=X\setminus E_1$ è t.c. $\mu(E_2)>0$ e $E_1\cap E_2=\emptyset$. $\square$

Lemma 2 Data μ misura non atomica, K compatto, $\mu(K)>0$, esistono $K_1,K_2\subset K$ compatti con $K_1\cap K_2=\emptyset$ e $\mu(K_1)>0$, $\mu(K_2)>0$

DIMOSTRAZIONE

Siano $E_1,E_2\in\mathcal{B}(X)$ dati dal Lemma 1. Poiché μ è internamente regolare, $\exists K_1\subset E_1$ t.c. $0<\mu(K_1)\leq\mu(E_1)<\mu(X)$. Analogamente, sia $K_2\subset E_2$ t.c. $0<\mu(K_2)\leq\mu(E_2)<\mu(X)$. Per costruzione, $K_1\cap K_2=\emptyset$. $\square$

Lemma 3 μ misura non atomica, K compatto, $\mu(K)>0$, allora $|K|\geq 2^{\aleph_0}$.

DIMOSTRAZIONE

$\forall \underline{i}=(i_k)\subset\{1,2\}^{\mathbb{N}^*}$, pongo $K_{\underline{i}}=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\underline{K^n_{i_1 i_2\dots i_n}}\neq\emptyset$ (succ. decrescente di compatti non vuoti)
Prendo $x_{\underline{i}}\in K_{\underline{i}}$
La mappa $T:\{1,2\}^{\mathbb{N}^*}\longrightarrow K$ è iniettiva
$\underline{i}\longmapsto x_{\underline{i}}$

$\Longrightarrow |K|\geq 2^{\aleph_0}$ $\square$

TEORIA DELL'INTEGRAZIONE

<u>Oss</u> "Aritmetica di $[0,+\infty]$"
Se $f \equiv c$ su E, $\int_E f = c\mu(E)$
Valgono le solite regole con la convenzione $+\infty \cdot c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c>0 \\ 0 & \text{se } c=0 \end{cases}$

Fisso $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Integrazione di funzioni semplici

Def. Una funzione semplice positiva è
$g: X \longrightarrow [0,+\infty)$ t.c. $\exists \{E_i\}$ partizione finita e misurabile di X,
$\exists \{\alpha_i\} \subset [0,+\infty)$ t.c. $f = \alpha_i$ su E_i
La classe delle funzioni semplici è $\mathcal{S} = \mathcal{S}(X, [0,+\infty))$

<u>Oss</u> Data $g: X \longrightarrow [0,+\infty)$, sono fatti equivalenti:
(i) g semplice
(ii) g misurabile e g ha un numero finito di valori
(iii) $\exists \{E_i\} \subseteq \mathcal{M}$ famiglia finita, $\exists \{\alpha_i\}$ t.c. $g = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$

Def. Per ogni $g \in \mathcal{S}$, pongo
$\int_X g \, d\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i)$
Dato $X' \in \mathcal{M}$, $\int_{X'} g \, d\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i \cap X')$

Lemma Date $g_1 \in \mathcal{S}$ con $\{E_{1,i}\}, \{\alpha_{1,i}\}$ e $g_2 \in \mathcal{S}$ con $\{E_{2,j}\}, \{\alpha_{2,j}\}$ possiamo assumere $\{E_{1,i}\} = \{E_{2,j}\}$.

DIMOSTRAZIONE
Sostituiamo $\{E_{1,i}\}$ e $\{E_{2,j}\}$ con $\{E_{1,i} \cap E_{2,j}\}_{i,j}$ □

Proposizione
(1) L'integrale è ben definito, cioè non dipende dalla scelta di $\{E_i\}$.
(2) L'integrale è additivo: $\int_X g_1 + g_2 \, d\mu = \int_X g_1 \, d\mu + \int_X g_2 \, d\mu$ $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{S}$.
(3) L'integrale è omogeneo: $\int_X \lambda g \, d\mu = \lambda \int_X g \, d\mu$ $\forall g \in \mathcal{S}, \forall \lambda \in [0,+\infty)$.
(4) $\int_{X_1 \cup X_2} g \, d\mu = \int_{X_1} g \, d\mu + \int_{X_2} g \, d\mu$ $\forall g \in \mathcal{S}$, $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{M}$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.
(5) L'integrale è monotono: $\int_X g_1 \, d\mu \le \int_X g_2 \, d\mu$ $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{S}, g_1 \le g_2$.

DIMOSTRAZIONE
(1) Data $g \in \mathcal{S}$, considero $\{E_i\}, \{\alpha_i\}$ t.c. $g = \alpha_i$ su E_i
e $\{E'_j\}, \{\alpha'_j\}$ t.c. $g = \alpha'_j$ su E'_j

$$\sum_i \alpha_i \mu(E_i) = \sum_i \alpha_i \sum_j \mu(E_i \cap E'_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(E_i \cap E'_j) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i,j} \alpha'_j \mu(E_i \cap E'_j) = \sum_j \alpha'_j \mu(E'_j)$$

$\alpha_i = \alpha'_j$ se $E_i \cap E'_j \neq \emptyset$ □

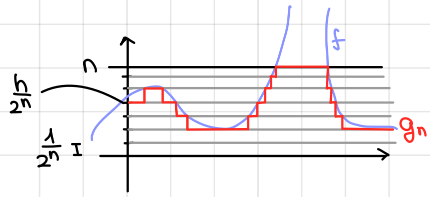
Integrazione di funzioni positive

Def. Data $f: X \to [0,+\infty]$ misurabile, definisco
$$\int_X f \, d\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ g \le f}} \int_X g \, d\mu \quad \in [0,+\infty]$$
Dato $X' \in \mathcal{M}$, $\int_{X'} f \, d\mu = \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ g \le f}} \int_{X'} g \, d\mu$

> **Lemma** Data $f: X \to [0,+\infty]$ misurabile, allora $\exists \{g_n\} \subseteq \mathcal{S}$ t.c. $g_n(x) \nearrow f(x)$ $\forall x \in X$.

DIMOSTRAZIONE

$g_n(x) = n \wedge 2^{-n} \lfloor 2^n f(x) \rfloor$ (massimo $h \cdot 2^{-n}$, $h \in \mathbb{N}$ t.c. $h \cdot 2^{-n} \le f(x)$)



$$= \sum_{h=0}^{n2^n-1} \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{\{f(x) \ge \frac{h+1}{2^n}\}} = \sum_{h=1}^{n2^n} \frac{h}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{h}{2^n} \le f(x) < \frac{h+1}{2^n}\}}$$

Si verifica che $g_n(x) \nearrow f(x)$ $\forall x \in X$

(se $f(x) < +\infty$, la convergenza segue da $\forall n \ge f(x)$ $f(x) - g_n(x) < \frac{1}{2^n}$)

($\frac{1}{2^n}$ serve per la monotonia, ad esempio $\frac{1}{n}$ non funziona) $\square$

> **Proposizione** (1) Se $f \in \mathcal{S}$, la definizione è compatibile con la precedente.
> (2) Additività.
> (3) Omogeneità.
> (4) Additività sul dominio.
> (5) Monotonia.

DIMOSTRAZIONE

(2) <u>Passo 1</u> $\int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu \le \int_X f_1 + f_2 \, d\mu$ (vero anche se f_1, f_2 non sono misurabili) (superadditività)

Siano $g_1, g_2 \in \mathcal{S}$ t.c. $g_1 \le f_1$, $g_2 \le f_2 \Longrightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{S}$ e $g_1 + g_2 \le f_1 + f_2$

Allora $\int_X f_1 + f_2 \, d\mu \ge \int_X g_1 + g_2 \, d\mu = \int_X g_1 d\mu + \int_X g_2 d\mu \overset{\sup}{\Longrightarrow} \int_X f_1 + f_2 d\mu \ge \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$

<u>Passo 2</u> Sia $g \in \mathcal{S}$ t.c. $g < f_1 + f_2$ oppure $g = f_1 + f_2$ se $f_1 + f_2 = 0$, $g = \alpha_i$ su E_i

Prendo $(g_{1,n}), (g_{2,n}) \subset \mathcal{S}$ t.c. $g_{1,n} \nearrow f_1$ e $g_{2,n} \nearrow f_2$ (per il lemma)

$\forall x \in X$:
- $f_1(x) + f_2(x) = 0 \Longrightarrow g_{1,n}(x) = g_{2,n}(x) = g(x) = 0 \Longrightarrow g_{1,n}(x) + g_{2,n}(x) \ge g(x)$
- $f_1(x) + f_2(x) > 0 \Longrightarrow f_1(x) + f_2(x) > g(x) \Longrightarrow \exists n(x)$ t.c. $g_{1,n}(x) + g_{2,n}(x) \ge g(x)$ $\forall n \ge n(x)$

$\forall i$ sia $E_{i,n} = \{x \in E_i \mid g_{1,n}(x) + g_{2,n}(x) \ge g(x) = \alpha_i\}$

Allora $E_{i,n} \nearrow E_i \Longrightarrow \mu(E_{i,n}) \longrightarrow \mu(E_i)$

$\int f_1 + \int f_2 \ge \int g_{1,n} + \int g_{2,n} = \int g_{1,n} + g_{2,n} \ge \int \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_{n,i}} = \sum_i \alpha_i \mu(E_{i,n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum \alpha_i \mu(E_i) = \int g$

cioè $\int f_1 + \int f_2 \ge \int g$

$\Longrightarrow \int f_1 + \int f_2 \ge \int f_1 + f_2$ perché $\int f = \sup\{\int g \mid g \in \mathcal{S}, g < f$ se $f > 0$, $g = f = 0$ altrimenti$\}$ $\square$

<u>Oss</u> Sia $F \subseteq X$ t.c. $\forall E \in \mathcal{M}, E \subseteq F$ vale $\mu(E) = 0$, $\forall E \in \mathcal{M}, F \subseteq E$ vale $\mu(E) = 1$

Quindi $F \notin \mathcal{M}$ e anzi $F \notin \tilde{\mathcal{M}}$ completamento di $\mathcal{M} \Longrightarrow \mathbb{1}_F$ non è misurabile

Allora $\int_X \mathbb{1}_F d\mu = 0$ e $\int_X \mathbb{1}_{F^c} d\mu = 0$ ma $\int_X \mathbb{1}_F + \mathbb{1}_{F^c} d\mu = \int_X d\mu = \mu(X)$

(In realtà, basta $F \subseteq X$ t.c. $\sup\{\mu(E) \mid E \in \mathcal{M}, E \subseteq F\} < \inf\{\mu(E) \mid E \in \mathcal{M}, F \subseteq E\}$)

<u>NOTA</u> Se f non è misurabile, si chiama integrale inferiore di Lebesgue

Teorema di convergenza monotona (Beppo Levi)

Siano $f_n : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabili t.c. $f_n \nearrow f$.
Allora $\int_X f_n \, d\mu \nearrow \int_X f \, d\mu$.

DIMOSTRAZIONE

$\sup \int f_n \leq \int f$ per monotonia

Rimane la disuguaglianza opposta

Sia $g \in \mathcal{S}$ t.c. $g < f$ se $f > 0$, $g = 0$ altrimenti : $g = \alpha_i$ su E_i

$\forall x \in X$ $f_n(x) \nearrow f(x) \Rightarrow \exists n(x) : f_n(x) \geq g(x)$ $\forall n \geq n(x)$

Siano $\forall i, n$ $E_{i,n} = \{x \in E_i \mid f_n(x) \geq g(x) = \alpha_i\}$, allora $E_{i,n} \nearrow E_i \Rightarrow \mu(E_{i,n}) \nearrow \mu(E_i)$

$\Rightarrow \int f_n \geq \int \sum \alpha_i \mathbb{1}_{E_{i,n}} = \sum \alpha_i \mu(E_{i,n})$

Per $n \longrightarrow +\infty$, $\sup \int f_n \geq \sum \alpha_i \mu(E_i) = \int g$ $\square$

Lemma di Fatou

Siano $f_n : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabili.
Allora $\liminf\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n \, d\mu$.

DIMOSTRAZIONE

Data $(a_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_n \inf\limits_{m \geq n} a_m$

Pongo $g_n(x) := \inf\limits_{m \geq n} f_m(x) \leq f_n(x)$, per cui $g_n(x) \nearrow f(x) := \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

Quindi

$$\liminf \int_X f_n \, d\mu \geq \liminf \int_X g_n \, d\mu = \lim \int_X g_n \, d\mu \underset{\text{convergenza monotona}}{=} \int_X f \, d\mu$$ $\square$

esempio $f_n = -\frac{1}{n} \nearrow 0$, ma

$-\infty = \int_{\mathbb{R}} f_n dx \neq \int_{\mathbb{R}} 0 \, dx = 0$

Oss
- $\int_X f \, d\mu < +\infty \Rightarrow f(x) < +\infty$ μ-q.o. $x \in X$
- $\int_E +\infty \, d\mu = +\infty$ se $\mu(E) > 0$
- $\int_E f \, d\mu = 0$ se $\mu(E) = 0$ (anche se $f \equiv +\infty$)
- (Markov) $\mu(\{x \in X . f(x) \geq m\}) \leq \frac{1}{m} \int_X f \, d\mu$
- $f = 0$ μ-q.o. $x \in E \Leftrightarrow \int_E f \, d\mu = 0$
- Date $f_n : X \rightarrow [0,+\infty]$ misurabili
  $\sum_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_n f_n \, d\mu$ (conmon + $\sum_{n=1}^{N} f_n \nearrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$)
- Data f, $\forall E \in \mathcal{M}$
  $\tilde{\mu}(E) := \int_E f \, d\mu$ è una misura (si indica spesso $f\mu$)

Integrazione di funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$

Def. Data $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile, pongo
$$\int_X f\,d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$
se almeno uno tra $\int_X f^+ d\mu$, $\int_X f^- d\mu$ è finito.
In tal caso, dico che f è **integrabile**.
Dico che f è **sommabile** (o L^1) se $\|f\|_1 := \int_X |f|\,d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < +\infty$.

Teorema di convergenza dominata (Lebesgue) Siano $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili tale che
(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ μ-q.o x
(ii) esiste $g \geq 0$, misurabile con $\int_X g\,d\mu < +\infty$ t.c. $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-q.o.x $\forall n$.
Allora $\int_X f_n\,d\mu \longrightarrow \int_X f\,d\mu$.

DIMOSTRAZIONE

$f_n \geq -g \implies f_n + g \geq 0$, quindi posso applicare Fatou:
$\liminf \left(\int_X f_n + g\,d\mu\right) \geq \int_X \liminf (f_n+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$
$\implies \liminf \int_X f_n\,d\mu \geq \int_X f\,d\mu$
Analogamente, poiché $f_n \leq g$, cioè $g - f_n \geq 0$, segue che
$\limsup \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$ $\square$

Lemma 1 (Y,d) spazio metrico.
Y è completo $\iff$ $\forall (y_n) \subset Y$ t.c. $\sum_{n=1}^{+\infty} d(y_{n+1}, y_n) < +\infty$ vale che (y_n) converge.

DIMOSTRAZIONE

$(\Longrightarrow)$ Data $(y_n) \subset Y$ t.c. $\sum_{n=1}^{+\infty} d(y_{n+1}, y_n) < +\infty$ e $\varepsilon > 0$,
$\exists \bar{n}$ t.c. $\sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} d(y_{n+1}, y_n) < \varepsilon$, quindi qualsiasi $m \geq n \geq \bar{n}$
si ha $d(y_m, y_n) \leq \sum_{n=n}^{m-1} d(y_{n+1}, y_n) \leq \sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} d(y_n, y_{n+1}) < \varepsilon$
$\implies (y_n)$ è di Cauchy quindi converge
$(\Longleftarrow)$ Sia (y_n) di Cauchy: $\forall k$ $\exists n_k$ t.c. $d(y_n, y_m) \leq \frac{1}{2^k}$ $\forall n,m \geq n_k$
In particolare posso prendere n_k crescenti, quindi $d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) \leq 2^{-k}$ $\forall k$
Quindi $\sum_{k=1}^{+\infty} d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1 < +\infty \implies (y_{n_k})$ converge $\implies (y_n)$ converge $\square$

Lemma 2 Sia Y spazio normato.
Y è completo $\iff \forall (z_n) \subset Y$ t.c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \|z_n\| < +\infty$
vale $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge.

DIMOSTRAZIONE

($\Rightarrow$) Data $(z_n) \subset Y$ t.c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \|z_n\| < +\infty$ e detta $y_m = \sum_{n=1}^{m} z_n$,
si ha $d(y_{m+1}, y_m) = \|y_{m+1} - y_m\| = \|z_{m+1}\| \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} d(y_{n+1}, y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \|z_{n+1}\| < +\infty$
quindi per il lemma 1 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge.

($\Leftarrow$) Sia (y_n) di Cauchy: $\forall k \; \exists n_k$ t.c. $\|y_n - y_m\| \leq \frac{1}{2^k} \; \forall n, m \geq n_k$
In particolare posso prendere n_k crescenti, quindi $\|y_{n_{k+1}} - y_k\| \leq 2^{-k} \; \forall k$
Sia ora $z_k = y_{n_{k+1}} - y_k$: vale $\sum_{k=1}^{+\infty} \|z_k\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} z_k = \lim_{k \to +\infty} y_{n_k} - y_0$ converge
$\Rightarrow (y_{n_k})$ converge $\Rightarrow (y_n)$ converge $\square$

Def. $\mathcal{L}^1(X) := \{ f : X \to \mathbb{R}$ misurabili t.c. $\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu < +\infty \}$

Proposizione
(1) $\mathcal{L}^1$ è uno spazio vettoriale e $\| \, \|_1$ è una seminorma su $\mathcal{L}^1$.
(2) $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ μ-q.o.
(3) $|\int_X f \, d\mu| \leq \|f\|_1$.
(4) $\mathcal{L}^1 \ni f \longmapsto \int_X f \, d\mu \in \mathbb{R}$ è lineare.
(5) Posto $f_1 \sim f_2 \iff f_1 = f_2$ μ-q.o. e $L^1(X) := \mathcal{L}^1/\sim \; (= \mathcal{L}^1/N)$,
allora L^1 è uno spazio vettoriale,
$\|\cdot\|_1$ è una norma su $L^1(X)$ ed è completa.

DIMOSTRAZIONE

(5) Uso il lemma 2
Sia $(f_n) \subset L^1$ t.c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$
$+\infty > \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n| d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| d\mu(x)$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ per $x \in X \setminus N$, con $\mu(N) = 0$
$\Rightarrow \forall x \in X \setminus N$ $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge (a $F(x)$)
(pongo $F = 0$ su N)
Dimostro che $\sum_{n=1}^{N} f_n \xrightarrow[N \to +\infty]{L^1} F$
Usando il teorema di convergenza dominata
$\int_X |\sum_{n=1}^{N} f_n(x) - F(x)| d\mu(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$
poiché $|F(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)| = |\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| =: g(x) \in L^1(X)$ $\square$

Integrazione di funzioni a valori vettoriali (integrale di Bochner)

Sia V spazio di Banach separabile e $f: X \longrightarrow V$ misurabile
Se V ha dimensione finita, $\int_X f \, d\mu$ si definisce scegliendo una base di V e integrando le componenti di f
Vogliamo definire $\int_X f \, d\mu$ (almeno se $f \in L^1$, cioè $\int_X |f(x)|_V \, d\mu(x) < +\infty$)
Parto dall'integrale delle funzioni semplici e lo estendo "per continuità"

Def. Per ogni $f: X \longrightarrow V$ misurabile, $\|f\|_1 := \int_X |f(x)|_V \, d\mu(x)$
(notare che $x \longmapsto |f(x)|_V$ è misurabile)
$\mathcal{L}^1(X,V) := \{ f: X \longrightarrow V \text{ misurabile con } \|f\|_1 < +\infty \}$
$L^1(X,V) := \mathcal{L}^1(X,V)/\sim$ è uno spazio di Banach con $\|\cdot\|_1$
$\mathcal{S}(X,V) := \{ f \in L^1(X,V) \text{ con } Im(f) \subseteq V \text{ finito} \} =$
$= \{ f: X \longrightarrow V \mid f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \text{ con } I \text{ finito}, \{E_i\} \subset \mathcal{M}, \{\alpha_i\} \subset V, \mu(E_i) < +\infty \ \forall i \}$
(funzioni semplici in L^1 a valori in V)
Per $f \in \mathcal{S}(X,V)$, pongo
$$\int_X f \, d\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i)$$

<u>Oss</u> $\mathcal{S}$ è sottospazio di $\mathcal{L}^1$ e anche di L^1

<u>Oss</u>
- $\sum_i \alpha_i \mu(E_i)$ non dipende dalla scelta di $\{E_i\}$ e $\{\alpha_i\}$
- $T: \mathcal{S} \longrightarrow V$ è lineare
  $f \longmapsto \int_X f \, d\mu$
- $\| \int_X f \, d\mu \|_V = \|T(f)\|_V \leq \|f\|_1$
  (uso che $|\sum \alpha_i v_i|_F \leq \sum |\alpha_i| |v_i|_F$)

Proposizione V, W spazi normati, $T: V \longrightarrow W$ lineare
Sono fatti equivalenti:
(i) T è uniformemente continua
(ii) T è continua
(iii) T è continua in 0
(iv) $\exists m > 0$ t.c. $\|Tv\|_W \leq m \|v\|_V \quad \forall v \in V$ (limitatezza)
(v) $\sup_{|v|_V \leq 1} |Tv|_W < +\infty$

DIMOSTRAZIONE
(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) chiaro
(iv) $\Rightarrow$ (v) $\quad \sup_{|v|_V \leq 1} |Tv|_W \leq m < +\infty$
(v) $\Rightarrow$ (iv) chiaro
(iv) $\Rightarrow$ (i) $\quad |Tv - Tw|_W = |T(v-w)|_W \leq m |v-w|_V \quad \forall v, w \in V$
(iii) $\Rightarrow$ (v) $\quad \exists \delta > 0 : |v|_V \leq \delta \Rightarrow |Tv|_W \leq 1$
Dato $v \in V$, considero $v' = \frac{\delta}{|v|_V} v$
$\Rightarrow 1 \geq |Tv'|_W = \frac{\delta}{|v|_V} |Tv|_W \Rightarrow \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|Tv|_W}{|v|_V} \leq \frac{1}{\delta} < +\infty$ $\square$

<u>NOTA</u> $\|T\| := \sup_{|v|_V \leq 1} |Tv|_V$

Lemma Sia (Z,d) spazio metrico completo.
Dati $C_n \subset Z$ chiusi non vuoti tali che
(i) $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$
(ii) $\operatorname{diam}(C_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Allora $\bigcap_n C_n$ contiene uno e un solo punto $\bar{x}$.

DIMOSTRAZIONE

$\forall n$ sia $x_n \in C_n$

Allora per (ii) (x_n) è di Cauchy $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$

Ora $\bar{x} \in C_n \ \forall n \Rightarrow \bar{x} \in \bigcap_n C_n$:

infatti, se per assurdo $\exists \bar{n} : \bar{x} \notin C_{\bar{n}} \Rightarrow \exists \delta > 0 : B(\bar{x},\delta) \cap C_{\bar{n}} = \emptyset$

$\Rightarrow B(\bar{x},\delta) \cap C_n = \emptyset \ \forall n \geq \bar{n} \Rightarrow |x_n - \bar{x}| \geq \delta \ \forall n \geq \bar{n}$ ↯

L'unicità segue dal fatto che

$\bar{x} \in C_n \ \forall n \Rightarrow C_n \subset B(\bar{x}, \operatorname{diam}(C_n)) \Rightarrow \bigcap_n C_n \subset \bigcap_n B(\bar{x}, \operatorname{diam} C_n) = \{\bar{x}\}$ □

Proposizione Sia (Y,d_Y) spazio metrico, (Z,d_Z) spazio metrico completo
$D \subset Y$ denso in Y, $f : D \longrightarrow Z$ uniformemente continua.
Allora $\exists! \ F : Y \longrightarrow Z$ uniformemente continua estensione di f.

DIMOSTRAZIONE

Passo 1 Costruzione di F

f unif. continua $\Rightarrow \forall \varepsilon \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ t.c. $d(y_0,y_1) \leq \delta \Rightarrow d(f(y_0), f(y_1)) \leq \varepsilon$

$\forall y \in Y \ \forall n$ sia $C_n^{(y)} := \overline{f(B(y, \frac{1}{4}\delta(\frac{1}{n})) \cap D)}$

allora $\operatorname{diam} f(B(y, \frac{1}{4}\delta(\frac{1}{n})) \cap D) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \operatorname{diam} C_n^{(y)} \leq \frac{1}{n}$,

$C_1^{(y)} \supset C_2^{(y)} \supset C_3^{(y)} \supset \dots$ e $C_n^{(y)} \neq \emptyset \ \forall n$

Per il lemma, $\bigcap_n C_n^{(y)} =: \{F(y)\}$

Passo 2 $F = f$ su D

Infatti, se $y \in D$, $f(y) \in C_n^{(y)} \ \forall n \Rightarrow f(y) \in \bigcap_n C_n^{(y)} \Rightarrow f(y) = F(y)$

Passo 3 F è uniformemente continua

Mostro che $d(y_0,y_1) \leq \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{n}) \Rightarrow d(f(y_0), f(y_1)) \leq \frac{3}{n} \quad \forall n$

Dati $y_0, y_1 \in Y$ t.c. $d(y_0,y_1) \leq \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{n})$

prendo $y_0', y_1' \in D$ t.c. $d(y_0,y_0'), d(y_1,y_1') \leq \frac{1}{4}\delta(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow d(y_0', y_1') \leq \delta(\frac{1}{n}) \Rightarrow d(f(y_0'), f(y_1')) \leq \frac{1}{n}$

Ora $f(y_0') \in C_n^{(y_0)} \Rightarrow f(y_0'), F(y_0) \in C_n^{(y_0)} \Rightarrow d(f(y_0'), F(y_0)) \leq \operatorname{diam} C_n^{(y_0)} \leq \frac{1}{n}$

Analogamente $d(f(y_1'), F(y_1)) \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow d(F(y_0), F(y_1)) \leq \frac{3}{n}$ □

corollario Siano V, W spazi normati, W di Banach.
Sia $D \subseteq V$ sottospazio denso di V,
Data $T : D \longrightarrow W$ continua e lineare,
$\exists! \ \tilde{T} : V \longrightarrow W$ estensione lineare di T

Lemma V separabile $\Longrightarrow \mathcal{S}(X,V)$ denso in $L^1(X,V)$.

DIMOSTRAZIONE

Data $f\in L^1$, $\varepsilon>0$, voglio costruire $g\in\mathcal{S}$ t.c. $\|f-g\|_1\le\varepsilon$

Prendo $(y_n)\subset V$ densa (con $y_n\neq 0\ \forall n$), $n\ge 1$

Definisco per ricorsione $A_n\subset V$

$$A_n=\overline{B(y_n,\varepsilon|y_n|)}\setminus\bigcup_{m<n}A_m$$

<u>Oss</u> $\forall y\in\overline{B(y_n,\varepsilon|y_n|)}\supset A_n$, vale

$$\|y-y_n\|_V\le\varepsilon\|y_n\|_V\le\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|y\|_V$$

<u>Oss</u> A_n è una partizione Boreliana di $V\setminus\{0\}$

Infatti, dato $y\in V\setminus\{0\}$, $\exists y_{n_k}\longrightarrow y$, quindi $\|y_{n_k}\|_V\longrightarrow\|y\|_V\Longrightarrow\|y_{n_k}\|\ge C>0\ \forall k$.

Poi $\exists\bar{k}$ t.c. $\|y-y_{n_{\bar k}}\|\le\varepsilon C\le\varepsilon\|y_{n_{\bar k}}\|$, con $\bar k$ minimo $\Longrightarrow y\in A_{\bar k}$.

<u>Oss</u> Posto $E_0:=f^{-1}(0)$, $E_n:=f^{-1}(A_n)\ \forall n$,

$\{E_n\}$ è una partizione misurabile di X

Pongo $\tilde g=\sum_{n=1}^{+\infty}y_n\mathbb{1}_{E_n}$ (non sta in $\mathcal{S}$, ma quasi)

$$\|f-\tilde g\|_1=\int_X|f-\tilde g|_V\,d\mu=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{E_n}|f-\tilde g|\,d\mu=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{E_n}|\overset{\in A_n}{f(x)}-y_n|\,d\mu(x)\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{E_n}\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}|f(x)|_V\,d\mu(x)\le\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|f\|_1$$

$\Longrightarrow\mathcal{S}^*=\{f:X\longrightarrow V\mid f=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n\mathbb{1}_{E_n},\ \{E_n\}\subset\mathcal{M},\ \{\alpha_n\}\subset V \text{ e } \sum|\alpha_n|\mu(E_n)<+\infty\}$

è denso in L^1

Infine $\tilde g$ è approssimata dalle serie troncate in L^1:

data $\tilde g=\sum\alpha_n\mathbb{1}_{E_n}$ e $g_n=\sum_{m=1}^{n}\alpha_m\mathbb{1}_{E_m}\in\mathcal{S}$, allora $g_n\xrightarrow{L^1}\tilde g$ □

Teorema T si estende univocamente per continuità su $L^1(X,V)$.

DIMOSTRAZIONE

Poiché $|Tf|_V\le\|f\|_1$, T è uniformemente continua

Siccome $\mathcal{S}(X,V)$ è denso in $L^1(X,V)$, si ottiene la tesi. □

corollario Data $f\in L^1(X,V)$ e data qualunque $(f_n)\subset\mathcal{S}(X,V)$ t.c. $f_n\xrightarrow{L^1}f$, vale che $\int_X f_n\,d\mu\longrightarrow\int_X f\,d\mu$.

corollario Siano $f_n:X\longrightarrow V$ misurabili t.c.

(i) $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ μ-q.o. $x\in X$

(ii) $\exists g:X\longrightarrow\mathbb{R}$ positiva misurabile t.c. $|f_n(x)|_V\le g(x)\ \forall x\ \forall n$.

Allora $f_n\xrightarrow{L^1}f$.

DIMOSTRAZIONE

$$\left|\int_X f_n\,d\mu-\int_X f\,d\mu\right|=\left|\int_X(f_n-f)\,d\mu\right|\le\int_X|f_n-f|\,d\mu\longrightarrow 0$$

per convergenza dominata

poiché $|f_n(x)-f(x)|\le|f_n(x)|+|f(x)|\le 2g(x)$. □

COSTRUZIONE DI MISURE

Def. Sia X insieme, $\mu: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ si dice misura esterna (o misura σ-subadditiva) se

(i) $\mu(\emptyset)=0$

(ii) $A\subseteq B \Longrightarrow \mu(A)\leq\mu(B)$ (monotonia)

(iii) $A\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longrightarrow \mu(A)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$ (σ-subadditività)

Def. $E\subseteq X$ si dice misurabile secondo Carathéodory (o μ-misurabile) se
$\forall A\subseteq X \quad \mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)=\mu(A)$
($\geq$ segue da (iii))
$\mathcal{M}=\mathcal{M}_\mu:=\{\mu\text{-misurabili}\}$

Teorema $\mathcal{M}_\mu$ è una σ-algebra e μ è σ-additiva su $\mathcal{M}_\mu$.

DIMOSTRAZIONE

(a) $\emptyset\in\mathcal{M}$ immediato

(b) $E\in\mathcal{M}\Longrightarrow E^c\in\mathcal{M}$ immediato

(c) $E_1,E_2\in\mathcal{M}\Longrightarrow E:=E_1\cup E_2\in\mathcal{M}$

Dato $A\subseteq X$, devo verificare $\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)\leq\mu(A)$

$$\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)\leq\mu(A\cap E_1)+\underbrace{\mu(A\cap(E_2\setminus E_1))+\mu(A\cap E_1^c\cap E_2^c)}\underset{E_2\in\mathcal{M}}{\leq}$$

$$\underset{E_2\in\mathcal{M}}{\leq}\mu(A\cap E_1)+\mu(A\cap E_1^c)\underset{E_1\in\mathcal{M}}{\leq}\mu(A)$$

(dove $\mu(A\cap(E_2\setminus E_1)) = \mu(A\cap E_2\cap E_1^c)$)

$\Longrightarrow \mathcal{M}$ è un'algebra

(d) Dati $E_1,\dots,E_N\in\mathcal{M}$ disgiunti con unione E, $\forall A\subset X$ vale

$$\mu(A\cap E_1)+\mu(A\cap E_2)+\dots+\mu(A\cap E_N)+\mu(A\cap E^c)=\mu(A) \qquad (*)$$

per induzione su N

(e) Dati $\{E_n\}\subseteq\mathcal{M}$ disgiunti con unione E, $\forall A\subset X$ vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A\cap E_n)+\mu(A\cap E^c)=\mu(A) \qquad (**)$$

$$\mu(A)\underset{(*)}{\geq}\sum_{n=1}^{N}\mu(A\cap E_n)+\mu\Big(A\cap\Big(\bigcup_{n=1}^{N}E_n\Big)^c\Big)\geq\sum_{n=1}^{N}\mu(A\cap E_n)+\mu(A\cap E^c) \quad \forall N$$

Prendo il sup su N e concludo

(f) $\mu(A)\underset{(**)}{\geq}\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A\cap E_n)+\mu(A\cap E^c)\underset{\sigma\text{-sub}}{\geq}\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)\Longrightarrow E:=\bigcup_{n=1}^{+\infty}E_n\in\mathcal{M}$

$\Longrightarrow\mathcal{M}$ è chiusa per unione disgiunta numerabile $\Longrightarrow\mathcal{M}$ è σ-algebra

(g) Se in (**) prendo $A=E$ ottengo $\mu(E)\geq\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(E_n)$

$\Longrightarrow\mu$ è σ-additiva su $\mathcal{M}$. $\square$

esempio $\mu(A)=1 \quad \forall A\neq\emptyset$
Allora $\mathcal{M}_\mu=\{\emptyset,X\}$

Teorema di Caratheodory

X spazio metrico, μ misura esterna su X additiva sui distanti, cioè $\mu(A_1)+\mu(A_2)=\mu(A_1\cup A_2)$ se $dist(A_1,A_2):=\inf\{d(x_1,x_2)\,|\,x_1\in A_1, x_2\in A_2\}>0$.
Allora $\mathcal{M}_\mu \supseteq \mathcal{B}(X)$.

DIMOSTRAZIONE

Basta far vedere che ogni E chiuso appartiene a $\mathcal{M}$

$\forall n=0,1,2,\dots$, pongo $F_n:=\{x\in X\,|\,\frac{1}{n+1}\leq dist(x,E)<\frac{1}{n}\}$

Oss F_n disgiunti, F_n, F_m distanti se $|n-m|\geq 2$

$\bigcup F_n = E^c$ perché $E=\overline{E}=\{x\in X\,|\,d(x,E)=0\}$

$$\sum_{\substack{n\leq N\\ n \text{ pari}}}\mu(F_n)=\mu\Big(\bigcup_{\substack{n\leq N\\ n\text{ pari}}}F_n\Big)\leq\mu\Big(\bigcup_n F_n\Big)$$

Prendendo il sup su N: $\sum_{n\text{ pari}}\mu(F_n)\leq\mu(\bigcup_n F_n)=\mu(E^c)$

Allo stesso modo:

$$\sum_{\substack{n\leq N\\ n \text{ pari}}}\mu(A\cap F_n)=\mu\Big(A\cap\bigcup_{\substack{n\leq N\\ n\text{ pari}}}F_n\Big)\leq\mu\Big(A\cap\bigcup_n F_n\Big)\leq\mu(A)\implies\sum_{n\text{ pari}}\mu(A\cap F_n)\leq\mu(A)$$

Analogamente $\sum_{n\text{ dispari}}\mu(A\cap F_n)\leq\mu(A)$

In particolare:

$$\sum_n\mu(A\cap F_n)\leq 2\mu(A)$$

Devo mostrare che $\forall A\subset X$: $\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)\leq\mu(A)$, e posso supporre $\mu(A)<+\infty$

Ora $\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)=\mu(A\cap E)+\mu\Big(A\cap\Big(\underbrace{\bigcup_{n=0}^{N}F_n}_{E_N}\cup\bigcup_{n>N}F_n\Big)\Big)\leq$

$$\leq\underbrace{\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E_N)}_{\text{distanti}}+\mu\Big(A\cap\bigcup_{n>N}F_n\Big)=\mu(A\cap(E\cup E_N))+\mu\Big(\bigcup_{n>N}A\cap F_n\Big)\leq$$

$$\leq\mu(A)+\underbrace{\sum_{n>N}\mu(A\cap F_n)}_{\xrightarrow{N\to+\infty}\,0}$$ perché coda di serie convergente

Quindi, prendendo il limite per $N\to+\infty$, otteniamo

$$\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)\leq\mu(A)$$

$\square$

costruzione di caratheodory di una misura esterna

Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, con $\emptyset \in \mathcal{F}$. Sia $\rho : \mathcal{F} \longrightarrow [0,+\infty]$ t.c. $\rho(\emptyset)=0$ (funzione di gauge)
Definisco $\forall A \subset X$
$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_i \rho(A_i) \mid \{A_i\} \subset \mathcal{F} \text{ ricoprimento numerabile di } A \right\}$$
Se A non ammette ricoprimenti, $\mu(A) = \inf \emptyset = +\infty$

proposizione μ è una misura esterna (misura esterna associata a $\mathcal{F}$ e ρ).

DIMOSTRAZIONE
(1) $\mu(\emptyset)=0$ perché $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\rho(\emptyset)=0$
(2) $A \subset A' \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(A')$ perché un ricoprimento ammissibile per A' lo è anche per A
(3) $A \subset \bigcup_n A_n \Longrightarrow \mu(A) \leq \sum_n \mu(A_n)$
Posso supporre $\sum_n \mu(A_n) < +\infty$. Dato $\varepsilon > 0$, $\forall n$ prendo $\{A_i^n\}_i$ un ricoprimento ammissibile di A_n t.c.
$$\sum_i \rho(A_i^n) \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$
Allora $\{A_i^n\}_{i,n}$ è un ricoprimento ammissibile di A
$$\Longrightarrow \mu(A) \leq \sum_{n,i} \rho(A_i^n) = \sum_n \sum_i \rho(A_i^n) \leq \sum_n \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_n \mu(A_n) + \varepsilon$$ □

<u>Oss</u> Se $\mathcal{F}$ è chiusa per unioni numerabili e ρ è monotona e σ-subadditiva, allora $\mu(A) = \inf\{\rho(E) \mid E \in \mathcal{F}, A \subseteq E\}$
e in particolare $\mu(A) = \rho(A)$ se $A \in \mathcal{F}$, cioè μ è un'estensione di ρ

Def. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice **anello** se è non vuoto e chiuso per le operazioni di unione finita, intersezione finita e differenza insiemistica

<u>Oss</u> Se $X \in \mathcal{F}$, allora $\mathcal{F}$ è un'algebra.

proposizione Se $\mathcal{F}$ è un anello e ρ è additiva su $\mathcal{F}$, allora $\mathcal{M}_\mu \supseteq \mathcal{F}$ (quindi $\mathcal{M}_\mu \supseteq \sigma$-algebra generata da $\mathcal{F}$).

DIMOSTRAZIONE
Dato $E \in \mathcal{F}$, $A \subset X$, devo far vedere che $\mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \leq \mu(A)$
Sia $\{E_i\} \subseteq \mathcal{F}$ un ricoprimento ammissibile per A
Quindi $\{E_i \cap E\} \subseteq \mathcal{F}$ è un ric. ammissibile per $A \cap E$, $\{E_i \cap E^c\} \subseteq \mathcal{F}$ per $A \cap E^c$
Allora $\mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \leq \sum_i \rho(E_i \cap E) + \rho(E_i \cap E^c) = \sum_i \rho(E_i)$
Prendendo l'inf sui ricoprimenti, $\mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \leq \mu(A)$ □

<u>Oss</u> Se X è spazio topologico e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X)$, allora μ è regolare esternamente sui boreliani (Borel-regolare dall'esterno)
$\forall A \subset X \; \exists E \in \mathcal{B}(X) : A \subset E$ e $\mu(A) = \mu(E)$

DIMOSTRAZIONE
Prendo una successione $\{E_i^n\}_i$ di ric. ammissibili di A t.c. $\sum_i \rho(E_i^n) \searrow \mu(A)$. Prendo $E = \bigcap_n \left(\bigcup_i E_i^n\right)$. □

costruzione della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$

Prendo $\mathcal{J} = \{ R = I_1 \times \_ \times I_d$ rettangolo d-dimensionale con assi paralleli agli assi coordinati, con $I_i \subset \mathbb{R}$ intervallo qualsiasi$\}$

$\rho(R) := \prod_{i=1} \text{lungh}(I_i)$ (volume d-dimensionale)

Sia μ la misura associata a $\mathcal{J}$ e ρ e $\mathcal{M}_\mu$ gli insiemi μ-misurabili. Allora

- μ è Borel-regolare dall'esterno
- $\mathcal{M}_\mu \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ perché μ è additiva sui distanti

DIMOSTRAZIONE

Fisso $\delta > 0$ e pongo $\mathcal{J}_\delta = \{ R \in \mathcal{J} \mid \text{diam}(I_i) \leq \delta \}$

Prendo ρ come prima e considero μ_δ associata a $\mathcal{J}_\delta$ e ρ:

(i) $\mu_\delta = \mu$ e (ii) μ_δ è additiva sugli insiemi che distano $> \sqrt{d}\,\delta$

(i) è immediato che $\mu_\delta \geq \mu$ poiché $\mathcal{J}_\delta \subseteq \mathcal{J}$

$\mu_\delta \leq \mu$ segue dal lemma

| Dato $R \in \mathcal{J}$ posso scrivere $R = \bigcup_j R_j$ numer. con $R_j \in \mathcal{J}_\delta$ e $\rho(R) = \sum_j \rho(R_j)$

$d=1$: $I = \bigcup_j I_j$ con $I_j = I \cap [j\delta, (j+1)\delta)$

Si verifica che $\text{lungh}(I) = \sum_j \text{lungh}(I_j)$

(ii) segue dal lemma

| Se $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^d$ e $\text{dist}(A_1, A_2) > \sqrt{d}\,\delta$ e $R \in \mathcal{J}_\delta$, allora R interseca al più uno tra A_1 e A_2 (perché $\text{diam}(R) \leq \sqrt{d}\,\delta$).

Allora, se $\{R_i\} \subseteq \mathcal{J}_\delta$ è un ricoprimento ammissibile per $A_1 \cup A_2$, allora $I_1 = \{ i \mid R_i \cap A_1 \neq \emptyset \}$ e $I_2 = \{ i \mid R_i \cap A_2 \neq \emptyset \}$ sono t.c. $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \cup I_2 \subset I$ e

$\sum_{i \in I} \rho(R_i) \geq \sum_{i \in I_1} \rho(R_i) + \sum_{i \in I_2} \rho(R_i) \geq \mu_\delta(A_1) + \mu_\delta(A_2)$

Passando all'inf sui ricoprimenti, $\mu_\delta(A_1 \cup A_2) \geq \mu_\delta(A_1) + \mu_\delta(A_2)$ $\square$

- $\mu(R) = \prod_{i=1}^{d} \text{lungh}(I_i) = \text{vol}(R)$ (se costruisco μ su $\mathbb{Q}^d$, $\mu(R) = 0$)

DIMOSTRAZIONE

Prendo $\tilde{\mathcal{J}} = \{ R \in \mathcal{J}, R \text{ aperto} \}$, ρ come prima e indico con $\tilde{\mu}$ la misura associata a $\tilde{\mathcal{J}}$ e ρ

(i) È ovvio che $\tilde{\mu} \geq \mu$ ma vale $\tilde{\mu} = \mu$

segue dal fatto che:

| $\forall R \in \mathcal{J}$ con $\text{vol}(R) < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R' \in \tilde{\mathcal{J}}$ t.c. $R \subset R'$ e $\text{vol}(R') \leq \text{vol}(R) + \varepsilon$

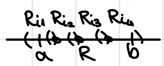
(ii) Se R è compatto, $\tilde{\mu}(R) = \text{vol}(R)$ (! non ci sono rettangoli compatti in $\mathbb{Q}^d$ tranne i punti)

Infatti $\mu(R) = \tilde{\mu}(R) = \inf \{ \sum_i \text{vol}(R_i) \mid \{R_i\} \subset \tilde{\mathcal{J}}$ ric. numerabile di $R \} =$

$= \inf \{ \sum_i \text{vol}(R_i) \mid \{R_i\} \subset \tilde{\mathcal{J}}$ ric. finito di $R \}$

Inoltre dato $R \in \mathcal{J}$, $R \subset \bigcup_i R_i$ finita, $R_i \in \mathcal{J}$, allora $\text{vol}(R) \leq \sum_i \text{vol}(R_i)$

Considereiamo R compatto, R_i aperti (a noi basta)

<u>$d=1$</u> : 

$[a,b] \subset \bigcup_j R_{ij}$ $\quad b - a = a_N - a_0 = \sum_{j=1}^{N} a_j - a_{j-1} \leq \sum_{j=1}^{N} \text{lungh}(R_{j-1})$

Quindi $\text{vol}(R) \geq \mu(R) = \tilde{\mu}(R) \geq \text{vol}(R)$

Si dimostra per R compatto, poi si usa che $\forall R$

$\text{vol}(R) = \sup \{ \text{vol}(R') \mid R' \text{ compatto}, R' \subset R \}$ $\square$

- $\forall A \subset \mathbb{R}^d$ $\mu(A) = \inf\{\mu(E) \mid E \text{ aperto}, E \supset A\}$, cioè μ è regolare sugli aperti dall'esterno
  Se $\mu(A) = +\infty$, allora $\mu(E) = +\infty$ $\forall E$ aperto, $E \supset A$.
  Se $\mu(A) < +\infty$, per definizione $\exists \{E_i\} \subset \tilde{\mathcal{J}}$ ric. di E t.c. $\sum p(E_i) \leq \mu(A) + \varepsilon$
  Allora $E := \bigcup E_i$ è aperto e $\mu(E) \leq \mu(A) + \varepsilon$
- $\forall A \in \mathcal{M}_\mu$ $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ compatto}, K \subset A\}$
  Poiché $\mathcal{M}_\mu$ è una σ-algebra, $A^c \in \mathcal{M}_\mu$ e $\mu(A^c) = \inf\{\mu(E) \mid E \text{ aperto}, E \supset A^c\}$
  Quindi, dato $\varepsilon > 0$, esiste E aperto t.c. $E \supset A^c$, $\mu(E \setminus A^c) \leq \varepsilon$
  Poiché $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) = \mu(E \setminus A^c) + \mu(A^c)$, otteniamo
  $$\mu(A \setminus E^c) \leq \mu(E) - \mu(A^c) \leq \varepsilon.$$
  Se A è limitato, allora E^c è compatto.
  Se A non è limitato, basta considerare $A_n := A \cap B(0,n) \nearrow A \Rightarrow \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.
  Dunque, dato $\varepsilon > 0$, $\exists \bar{n}$ t.c. $\mu(A_{\bar{n}}) \geq \mu(A) - \varepsilon$.
  Ora basta applicare quanto sopra al limitato $A_{\bar{n}}$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_\mu$ $\forall \varepsilon > 0$ esiste E aperto, C chiuso t.c. $C \subseteq A \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) \leq \varepsilon$

Misure di Hausdorff

Sia X spazio metrico, $d>0$, $\delta\in(0,+\infty]$.
(la misura di Hausdorff 0-dimensionale è $\mathcal{H}^0(E)=\#E$)
Pongo $\rho_d(E)=(\operatorname{diam}E)^d$
$\mathcal{F}_\delta:=\{E\subseteq X \mid \operatorname{diam}(E)\le\delta\}$
e pongo $\mathcal{H}^d_\delta:=\mu_{\mathcal{F}_\delta,\rho_d}$ (pre-misura di Hausdorff)
cioè $\mathcal{H}^d_\delta=\inf\{\sum_i(\operatorname{diam}(E_i))^d \mid \{E_i\}\text{ ric. num. di } E, \operatorname{diam}(E_i)\le\delta\}$
Infine pongo
$$\mathcal{H}^d(E)=\sup_{\delta>0}\mathcal{H}^d_\delta(E)=\lim_{\delta\to0^+}\mathcal{H}^d_\delta(E)$$

$\mathcal{H}^d_\delta$ è una misura esterna (per Caratheodory)
Inoltre, se $\operatorname{dist}(E,E')>\delta$, allora $\mathcal{H}^d_\delta(E\cup E')=\mathcal{H}^d_\delta(E)+\mathcal{H}^d_\delta(E')$
Infatti, $(\le)$ chiara;
per $(\ge)$, se $\{E_i\}$ ric. di $E\cup E'$, sia $I=\{i: E_i\cap E\neq\emptyset\}$, $I'=\{i: E_i\cap E'\neq\emptyset\}$,
allora $I\cap I'=\emptyset \implies \sum_i(\operatorname{diam}(E_i))^d\ge\sum_{i\in I}(\operatorname{diam}(E_i))^d+\sum_{i\in I'}(\operatorname{diam}(E_i))^d\ge\mathcal{H}^d_\delta(E)+\mathcal{H}^d_\delta(E')$
Passando all'inf sui ricoprimenti, ottengo la disuguaglianza.
Ne segue che $\mathcal{H}^d$ è una misura esterna e $\mathcal{H}^d$ è additiva sui distanti.
In particolare $\mathcal{B}(X)\subseteq\mathcal{M}_{\mathcal{H}^d}\implies\mathcal{H}^d$ è σ-additiva sui Boreliani

Lemma Sia $\mathcal{G}$ una famiglia di misure esterne.
Sia $\lambda=\sup_{\mu\in\mathcal{G}}\mu$.
Allora λ è una misura esterna su X.

DIMOSTRAZIONE
- $\lambda(\emptyset)=0$: chiaro
- $A\subseteq B\implies\mu(A)\le\mu(B)\ \forall\mu\in\mathcal{G}\implies\lambda(A)\le\lambda(B)$
- $A\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\implies\mu(A)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)\ \forall\mu\in\mathcal{G}\implies\lambda(A)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda(A_n)$ $\square$

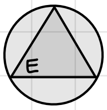
NOTA Se d è intero, la definizione di $\mathcal{H}^d$ (e di $\mathcal{H}^d_\delta$) include
la costante di rinormalizzazione $\frac{\alpha_d}{2^d}$ con $\alpha_d:=$ volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^d$
(cioè $\mathcal{H}^d_\delta=\frac{\alpha_d}{2^d}\inf\{\dots\}$)
Grazie a questo, $\mathcal{H}^d=\mathcal{L}^d$ su $\mathbb{R}^d$ (non lo dimostriamo: dis. isodiametrica + ricoprimento)
$\mathcal{H}^d,\mathcal{L}^d$ sono misure sui Boreliani invarianti per traslazione e finite sui limitati
$\implies$ (vedremo poi) $\mathcal{H}^d=c\mathcal{L}^d$

NOTA Nulla cambia se nella definizione di $\mathcal{H}^d_\delta$ sostituisco $\mathcal{F}_\delta$ con:
$\mathcal{F}_\delta\cap\{\text{chiusi}\}$, $\mathcal{F}_\delta\cap\{\text{aperti}\}$,
$\mathcal{F}_\delta\cap\{\text{chiusi convessi}\}$, $\mathcal{F}_\delta\cap\{\text{aperti convessi}\}$ (X spazio normato)
Ma cambia qualcosa se considero $\mathcal{F}_\delta\cap\{\text{palle chiuse}\}$
In tal caso si ottiene la misura di Hausdorff sferica $\mathcal{H}^d_S$

DIMOSTRAZIONE
(a) segue da $\forall E\subset X$ $\operatorname{diam}(\overline{E})=\operatorname{diam}(E)$
Se $\{E_i\}$ ric. num. di $E\implies\{\overline{E_i}\}$ ric. num. di E e $\sum_i(\operatorname{diam}(\overline{E_i}))^d=\sum_i(\operatorname{diam}(E_i))^d$
(b) $\forall E\subset X\ \forall\varepsilon>0\ \exists A$ aperto t.c. $E\subset A$, $\operatorname{diam}(A)\le\operatorname{diam}(E)+\varepsilon$
(c) $\forall E\subset X$, $\operatorname{diam}(\overline{\operatorname{conv}(E)})=\operatorname{diam}(E)$
(d) come i punti precedenti $\square$

Riguardo ad (e), non è vero che ogni $E \subset X$ è contenuto in una palla chiusa B con $\mathrm{diam}(E) = \mathrm{diam}(B)$

esempio in $\mathbb{R}^2$



Tuttavia $\forall E \subset X \ \exists B$ palla chiusa t.c. $E \subset B$, $\mathrm{diam}(E) \le \mathrm{diam}(B) \le 2\,\mathrm{diam}(E)$

$\Longrightarrow \mathcal{H}^d(E) \le \mathcal{H}^d_S(E) \le 2^d \mathcal{H}^d(E)$

<u>Oss</u> $\mathcal{H}^d_S$ è Borel-regolare dall'esterno e quindi anche $\mathcal{H}^d$ è Borel-regolare dall'esterno

Lemma Sia $\mathcal{G}$ una famiglia numerabile di misure esterne su X Borel-regolari dall'esterno. Allora $\lambda = \sup_{\mu \in \mathcal{G}} \mu$ è Borel-regolare dall'esterno.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{G} = \{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e sia $E \in \mathcal{U}$. Fisso $\varepsilon > 0$:

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists E_n \in \mathcal{B}(X)$, $E \subseteq E_n$ tc $\mu_n(E_n) \le \mu_n(E) + \varepsilon \le \lambda(E) + \varepsilon$

Definisco $F := \bigcap_n E_n \in \mathcal{B}(X)$:

$\forall n \ \mu_n(F) \le \mu_n(E_n) \le \lambda(E) + \varepsilon$

Passando al sup su n, $\lambda(F) \le \lambda(E) + \varepsilon \Rightarrow \lambda$ Borel-regolare dall'esterno $\square$

esempio il lemma non vale in generale se $\mathcal{G}$ è più che numerabile

<u>Oss</u> $\mathcal{H}^d = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^d_\delta = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^d_{\frac{1}{n}}$

<u>Oss</u> $f : X \longrightarrow Y$ L-Lipschitz. Allora

$\forall E \subset X \quad \mathcal{H}^d_Y(E) \le L^d \mathcal{H}^d_X(E)$

(Segue dal fatto che $\mathrm{diam}(f(E)) \le L\,\mathrm{diam}(E)$)

Se $f : X \longrightarrow Y$ è bilipschitz con costanti L, L', cioè

$$L' d_X(x,y) \le d_Y(f(x), f(y)) \le L d_X(x,y),$$

allora $\quad L'^d \mathcal{H}^d_X(E) \le \mathcal{H}^d_Y(f(E)) \le L^d \mathcal{H}^d_X(E)$

In particolare, se f è isometria, allora $\mathcal{H}^d(f(E)) = \mathcal{H}^d(E)$

corollario $\mathcal{H}^d$ su $\mathbb{R}^n$ è invariante per traslazioni e rotazioni, e $\mathcal{H}^d(\lambda E) = \lambda^d \mathcal{H}^d(E)$.

NOTA Dato d intero, ci sono tante altre misure d-dimensionali ma in generale coincidono su $\mathbb{R}^d$ e su ogni Σ superficie d-dimensionale in $\mathbb{R}^n$ (o anche Σ varietà Riemanniana).

Lemma Sia Σ superficie d-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.
Sia μ misura di Borel su Σ t.c. $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ t.c. dato U aperto di Σ, $f:\Sigma\cap U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ δ-isometria (cioè $\frac{1}{1+\delta} d_\Sigma(x,x') \leq |f(x)-f(x')| \leq (1+\delta) d_\Sigma(x,x')$), allora $\forall E$ $\frac{1}{1+\varepsilon}\mu(E) \leq \mathcal{L}^d(f(E)) \leq (1+\varepsilon)\mu(E)$.
Allora $\mu = \mathcal{H}^d$.

DIMOSTRAZIONE
Osserviamo che $\mathcal{H}^d$ soddisfa la tesi; mostriamo che μ è unica.
Siano μ_1, μ_2 come per ipotesi, $E\subset\Sigma$ Borel.
Fissiamo $\varepsilon>0$ e sia δ dato dall'ipotesi.
Copriamo Σ con aperti U_i t.c. $\exists f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$ δ-isometria
Scriviamo $E = \overset{\circ}{\bigcup} E_i$ con $E_i \subset U_i$. Allora

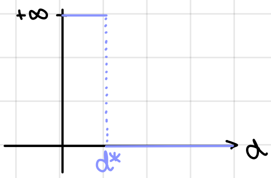
$$\frac{1}{1+\varepsilon}\mathcal{L}^d(f_i(E_i)) \leq \mu_1(E_i) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{L}^d(f_i(E_i)), \quad \frac{1}{1+\varepsilon}\mathcal{L}^d(f_i(E_i)) \leq \mu_2(E_i) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{L}^d(f_i(E_i))$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\mu_1(E_i) \leq \mu_2(E_i) \leq (1+\varepsilon)^2\mu_1(E_i) \Longrightarrow \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\mu_1(E) \leq \mu_2(E) \leq (1+\varepsilon)^2\mu_1(E)$$

Prendendo il limite $\varepsilon \longrightarrow 0$, otteniamo $\mu_1(E) = \mu_2(E)$. $\square$

Oss Le δ-isometrie esistono sempre (ad esempio la proiezione sul tangente).

$\mathcal{H}^d(E) < +\infty \Longrightarrow \mathcal{H}^{d'}(E) = 0 \ \forall d' > d$
$\{E_i\}$ ric. num. di E con $\operatorname{diam}(E_i) \leq \delta$,
allora $(\operatorname{diam}(E_i))^{d'} \leq \delta^{d'-d}(\operatorname{diam}(E_i))^d$
$\mathcal{H}^d(E) > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^{d'}(E) = +\infty \ \forall d' < d$



$d^* := \dim_H(E)$ dimensione di Hausdorff
Se $0 < \mathcal{H}^{\bar{d}}(E) < +\infty$, allora $d^* = \bar{d}$

EX Se $f: X \longrightarrow Y$ è α-Hölder di costante L,
allora $\mathcal{H}^{\frac{d}{\alpha}}(f(E)) \leq L^{\frac{d}{\alpha}} \mathcal{H}^d(E)$

$\Longrightarrow$ data $\gamma: [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ surgettiva,
allora l'esponente di Hölder di γ è $\leq \frac{1}{2}$
(la curva di Peano è $\frac{1}{2}$-Hölder)

EX Dimostrare che $\mathcal{H}^1([0,1]) = 1$
Dimostrare che $0 < \mathcal{H}^d([0,1]^d) < +\infty$ $\forall d$ intero
$\dim_H \mathbb{R}^d = d$
$\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}$ (insieme di Cantor)

TEOREMA DELLE CLASSI MONOTONE

Sia μ misura su $\mathcal{B}([0,1])$ t.c. $\mu([a,b]) = b-a \ \forall 0 \leq a < b \leq 1 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \mu = \mathcal{L}^1$

Tentativo di dimostrazione:
Sia $\mathcal{F} = \{E \in \mathcal{B}([0,1]) \mid \mu(E) = \mathcal{L}^1(E)\}$
Se mostro che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra, ho finito, perché
$\{\text{intervalli}\} \subset \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}([0,1]) \Longrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$
E' facile mostrare che
- $X \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ chiuso per unione numerabile crescente
- $\mathcal{F}$ chiuso per intersezione numerabile decrescente
- $\mathcal{F}$ chiuso per unione numerabile disgiunta

Non è ovvio che $\mathcal{F}$ sia chiuso per intersezione finita (o unione)

Def. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è un λ-sistema (o sistema di Dynkin) se
(1) $X \in \mathcal{G}$
(2) $A, A' \in \mathcal{G},\ A \subset A' \Rightarrow A' \setminus A \in \mathcal{G}$
(3) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G},\ A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{G}$

Conseguenze
(4) $\mathcal{G}$ è chiuso per complementare (per (1) e (2))
(5) $\mathcal{G}$ è chiuso per unione disgiunta finita:
$A_1, A_2 \in \mathcal{G},\ A_1 \cap A_2 = \emptyset \Longrightarrow (A_1 \cup A_2)^c = \underbrace{(X \setminus A_1)}_{\in \mathcal{G}} \setminus A_2 \in \mathcal{G}$ perché $A_2 \subseteq A_1^c$
$\overset{(4)}{\Longrightarrow} A_1 \cup A_2 \in \mathcal{G}$
(6) $\mathcal{G}$ è chiuso per intersezione decrescente:
$(A_n) \subset \mathcal{G},\ A_n \downarrow A \Longrightarrow \{A_n^c\} \subset \mathcal{G},\ A_n^c \uparrow A^c \overset{(3)}{\Longrightarrow} A^c \in \mathcal{G} \overset{(4)}{\Longrightarrow} A \in \mathcal{G}$
(7) $\mathcal{G}$ è chiuso per unione disgiunta numerabile.
$(A_n) \subset \mathcal{G}$ disgiunti $\overset{(5)}{\Longrightarrow} B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{G}\ \forall i$ e $B_i \uparrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \overset{(3)}{\Longrightarrow} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$

Oss Manca $\mathcal{G}$ chiuso per intersezione finita (o equivalentemente unione finita)

esempio $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio di probabilità per lancio di 2 monete
con $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
P probabilità per lanci indipendenti; Q t.c. 2° lancio è uguale al 1°
cioè $P(\{TT\}) = P(\{TC\}) = P(\{CT\}) = P(\{CC\}) = \frac{1}{4}$
$Q(\{TT\}) = Q(\{CC\}) = \frac{1}{2}$, $Q(\{TC\}) = Q(\{CT\}) = 0$
$\{A \in \mathcal{F} : P(A) = Q(A)\} = \{\{TT, TC\}, \{TT, CT\}, \{CT, CC\}, \{TC, CC\}, \emptyset, \Omega\}$
è un λ-sistema ma non una σ-algebra (non è chiuso per intersez. finita)

<u>Oss</u> Intersezione di una famiglia qualunque di λ-sistemi su X è un λ-sistema su X.
Quindi, dato $\mathcal{F}\subseteq P(X)$, esiste il più piccolo λ-sistema che contiene $\mathcal{F}$, che indichiamo $\lambda(\mathcal{F})$.

<u>Oss</u> $\lambda(\mathcal{F})\subseteq\sigma(\mathcal{F})$

Teorema (Lemma di Dynkin, π-λ theorem) Se $\mathcal{F}$ è chiusa per intersezione finita, allora $\lambda(\mathcal{F})=\sigma(\mathcal{F})$.

DIMOSTRAZIONE

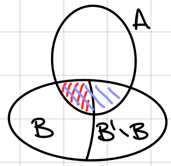
Basta dimostrare che $\lambda(\mathcal{F})$ è una σ-algebra, anzi, che $\lambda(\mathcal{F})$ è chiusa per intersezione finita.

<u>PASSO 1</u> $A\in\mathcal{F}, B\in\lambda(\mathcal{F}) \Longrightarrow A\cap B\in\lambda(\mathcal{F})$

Sia $\mathcal{G}_A=\{B\in\lambda(\mathcal{F}) : A\cap B\in\lambda(\mathcal{F})\}\subset\lambda(\mathcal{F})$

Se dimostro che $\mathcal{G}_A$ è un λ-sistema e $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}_A$, allora $\mathcal{G}_A=\lambda(\mathcal{F})$

- $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}$: $B\in\mathcal{F}\Longrightarrow A\cap B\in\mathcal{F}\subset\lambda(\mathcal{F})$
- $X\in\mathcal{G}_A$
- $B,B'\in\mathcal{G}_A, B\subset B'$: $A\cap(B'\setminus B)=(\underset{\lambda(\mathcal{F})}{\underset{\in}{A\cap B'}})\setminus(\underset{\lambda(\mathcal{F})}{\underset{\in}{A\cap B}})$
  e $A\cap B\subset A\cap B'$
  $\Longrightarrow A\cap(B'\setminus B)\in\lambda(\mathcal{F}) \Longrightarrow B'\setminus B\in\mathcal{G}_A$
- $(B_n)\subset\mathcal{G}_A$, $B_n\uparrow B$: $A\cap B_n\in\lambda(\mathcal{F})$, $A\cap B_n\uparrow A\cap B$
  $\Longrightarrow A\cap B\in\lambda(\mathcal{F}) \Longrightarrow B\in\mathcal{G}_A$



<u>PASSO 2</u> $A,B\in\lambda(\mathcal{F})\Longrightarrow A\cap B\in\lambda(\mathcal{F})$

Analogo al passo 1. □

Def. $\mathcal{G}$ è una classe monotona se è chiuso per unione numerabile crescente e intersezione numerabile decrescente.

<u>Oss</u> Dato $\mathcal{F}\subseteq P(X)$, esiste la più piccola classe monotona che contiene $\mathcal{F}$; la indico con $m(\mathcal{F})$.
Vale $m(\mathcal{F})\subseteq\sigma(\mathcal{F})$.

Teorema Se $\mathcal{F}$ è un'algebra, allora $m(\mathcal{F})=\sigma(\mathcal{F})$.

Teorema Sia $\mathcal{M}$ σ-algebra su X generata da $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}=\sigma(\mathcal{F})$, con $\mathcal{F}$ chiuso per intersezione.
Siano μ_1, μ_2 misure su $\mathcal{M}$ tali che
- $\mu_1(A)=\mu_2(A) \ \forall A \in \mathcal{F}$
  $\mu_1(X)=\mu_2(X)<+\infty$

Allora $\mu_1=\mu_2$ su $\mathcal{M}$.

DIMOSTRAZIONE
Sia $\mathcal{G}=\{E\in\mathcal{M} \mid \mu_1(E)=\mu_2(E)\}$
Mostro che $\mathcal{G}$ è un λ-sistema; per ipotesi $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}_A$, quindi
$$\mathcal{G}\supseteq\lambda(\mathcal{F})=\sigma(\mathcal{F})=\mathcal{M} \implies \mathcal{G}=\mathcal{M}.$$
$\mathcal{G}$ è un λ-sistema:
- $X\in\mathcal{G}$ per ipotesi
- $B,B'\in\mathcal{G}$, $B\subset B' \implies \mu_1(B)=\mu_2(B), \mu_1(B')=\mu_2(B')$
  $\implies \mu_1(B'\setminus B)=\mu_1(B')-\mu_1(B)=\mu_2(B')-\mu_2(B)=\mu_2(B'\setminus B) \implies B'\setminus B\in\mathcal{G}$
- $(B_n)\subset\mathcal{G}$, $B_n\uparrow B \implies \mu_1(B)=\sup\mu_1(B_n)=\sup\mu_2(B_n)=\mu_2(B)\implies B\in\mathcal{G}$ □

corollario Siano μ_1,μ_2 misure finite su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tali che
$\mu_1((-\infty,a])=\mu_2((-\infty,a]) \ \forall a\in\mathbb{R}$.
Allora $\mu_1=\mu_2$ (la funzione di ripartizione determina univocamente la misura).

DIMOSTRAZIONE
Sia $\mathcal{F}=\{(-\infty,a] \mid a\in\mathbb{R}\}$, allora $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}$ è chiuso per intersezione.
Ma $X=\bigcup_{n=0}^{+\infty}(-\infty,n] \implies \mu_1(X)=\mu_2(X)$.
Per il Teorema, $\mu_1=\mu_2$ □

<u>esempio</u> Esiste X spazio metrico compatto e μ_1,μ_2 misure di probabilità su $\mathcal{B}(X)$ t.c.
$\mu_1(\overline{B(x,r)})=\mu_2(\overline{B(x,r)}) \ \forall x,r$ ma $\mu_1\neq\mu_2$
Non si applica il Teorema perché
$\mathcal{F}=\{$palle chiuse$\}$ genera $\mathcal{B}(X)$ ma non è chiuso per intersezione.
Se $X\subset\mathbb{R}^n$, è vero che due misure finite che coincidono sulle palle sono uguali sui boreliani.

corollario Sia $\mathcal{M}$ σ-algebra su X generata da $\mathcal{Y}$, $\mathcal{M}=\sigma(\mathcal{Y})$, con $\mathcal{Y}$ chiuso per intersezione
Siano μ_1, μ_2 misure su $\mathcal{M}$ tali che
(a) $\mu_1(A)=\mu_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{Y}$
(b) $\exists (B_n) \subset \mathcal{Y}$ t.c. $\mu_1(B_n)=\mu_2(B_n)<+\infty \ \forall n$
e $\bigcup_n B_n = X$
Allora $\mu_1=\mu_2$.

DIMOSTRAZIONE
Basta applicare il Teorema a $\mu_1 \llcorner B_n$ e $\mu_2 \llcorner B_n$ $\forall n$ $\square$

corollario La misura di Lebesgue $\mathcal{L}^d$ è l'unica misura μ su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tale che $\mu(R)=\mathrm{vol}_d(R)$ $\forall R \subseteq \mathbb{R}^d$ rettangolo.

corollario $\mathcal{L}^d$ è l'unica misura esterna Borel regolare μ su $\mathbb{R}^d$ tale che $\mu(R)=\mathrm{vol}(R)$ $\forall R$ rettangolo.

DIMOSTRAZIONE
Supponendo $\mathcal{M}_\mu \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, segue dal corollario precedente e dalla regolarità. $\square$

Regolarità delle misure di Borel

proposizione Sia X spazio metrico, μ misura finita su $\mathcal{B}(X)$.
Allora $\forall E \in \mathcal{B}(X)$ $\quad \mu(E)=\inf\{\mu(A) \mid A \text{ aperto}, A \supset E\}$
(regolarità dall'esterno con gli aperti)

DIMOSTRAZIONE
$\forall E \in \mathcal{B}(X)$ sia $\tilde{\mu}(E) := \inf\{\mu(A) \mid A \text{ aperto}, A \supset E\}$
<u>Oss</u> $\tilde{\mu}$ è la misura esterna data dalla costruzione di Caratheodory con $\mathcal{Y}=\{\text{aperti}\}$, $\rho(E)=\mu(A)$, osservando che $\sum \mu(A_i) \geq \mu(\bigcup A_i)$
<u>Oss</u> μ è additiva sui distanti $\Rightarrow \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_{\tilde{\mu}}$
Se $\mathrm{dist}(E_1,E_2)=\delta>0$, per $i=1,2$ $B_i = \frac{\delta}{3}$-intorno di $E_i = \bigcup_{x\in E_i} B_{\frac{\delta}{3}}(x)$
B_i aperti, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e $B_i \supset E_i$
$\forall A$ aperto $\supset E_1 \cup E_2$
$$\mu(A) \geq \mu(\underbrace{A\cap B_1}_{\supseteq E_1}) + \mu(\underbrace{A \cap B_2}_{\supseteq E_2}) \geq \tilde{\mu}(E_1)+\tilde{\mu}(E_2)$$
Prendendo inf su A, ottengo $\quad \tilde{\mu}(E_1 \cup E_2) \geq \tilde{\mu}(E_1)+\tilde{\mu}(E_2)$,
quindi $\tilde{\mu}(E_1\cup E_2)=\tilde{\mu}(E_1)+\tilde{\mu}(E_2)$
$\Rightarrow$ μ e $\tilde{\mu}$ sono misure su $\mathcal{B}(X)$ che coincidono su $\mathcal{Y}=\{\text{aperti}\}$, chiuso per intersezione $\Rightarrow \mu=\tilde{\mu}$ su $\mathcal{B}(X)$ $\square$

Proposizione Sia X spazio metrico, μ misura finita su $\mathcal{B}(X)$.
Allora $\forall E\in\mathcal{B}(X)$
$$\mu(E)=\sup\{\mu(C)\mid C \text{ chiuso}, C\subset E\}$$
e, se X è separabile,
$$\mu(E)=\sup\{\mu(C)\mid C \text{ chiuso e tot. limitato}, C\subset E\}.$$
Se X è completo,
$$\mu(E)=\sup\{\mu(K)\mid K \text{ compatto}, K\subset E\}.$$

DIMOSTRAZIONE

(1) $\mu(E^c)=\inf\{\mu(A)\mid A \text{ aperto}, A\supset E^c\}$
$\Rightarrow \mu(E)=\mu(X)-\mu(E^c)=\sup\{\mu(X)-\mu(A)\mid A \text{ aperto}, A\supset E^c\}=$
$=\sup\{\mu(C)\mid C \text{ chiuso}, C\subset E\}.$

(2)

Lemma $\forall E\in\mathcal{B}(X), \forall\varepsilon>0, \exists E'\subset E$ totalmente limitato t.c. $\mu(E')\geq\mu(E)-\varepsilon$.
(Se E è chiuso, posso prendere E' chiuso)

DIMOSTRAZIONE

Sia (x_n) densa in X.
Allora $\forall k$ $X=\bigcup_n \overline{B(x_n,\frac{1}{2^k})} \Rightarrow E=\bigcup_n E\cap\overline{B(x_n,\frac{1}{2^k})}$
$\forall N$ sia $E^k_N=\bigcup_{n=1}^{N} E\cap\overline{B(x_n,\frac{1}{2^k})}$, $E^k_N\uparrow E \Rightarrow \mu(E^k_N)\nearrow\mu(E)$
$\Rightarrow \exists N_k$ t.c. $\mu(E^k_{N_k})\geq\mu(E)-\frac{\varepsilon}{2^k}$
Prendo $E'=\bigcap_k E^k_{N_k}\subset E^k_{N_k}\subset$ unione finita di palle di raggio $\frac{1}{2^k}$ $\forall k$
$\Rightarrow E'$ tot. limitato
$E\setminus E'=E\cap E'^c=E\cap\bigcup_k(E^k_{N_k})^c=\bigcup_k E\cap(E^k_{N_k})^c=\bigcup_k(E\setminus E^k_{N_k})$
$\Rightarrow \mu(E\setminus E')\leq\sum_k\mu(E\setminus E^k_{N_k})\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$ □

<u>Commenti</u>

(1) <u>Ex</u> Data μ misura finita su X
Sia $\mathrm{supp}(\mu)$ il più piccolo chiuso C t.c. $\mu(X\setminus C)=0$
Allora $\mathrm{supp}(\mu)$ è separabile

(2) $\tilde{\mu}(E)=\inf\{\mu(A)\mid A \text{ aperto}, A\supset E\}$
$\forall C$ chiuso, $C\in\mathcal{M}_{\tilde{\mu}}$: non serve spazio metrico, basta di meno

(3) Se μ non è finita?
Per esempio, μ σ-finita : Prop 1 è falsa
$X=[0,1]$, $\mu=\sum\delta_{x_n}$ con $\{x_n\}$ denso in X
$\Rightarrow \mu(A)=+\infty$ $\forall A$ ma $\mu(\{x\})=\begin{cases}0\\1\end{cases}$
Tuttavia, sotto opportune ipotesi, vale sia Prop. 1 che 2
(anzi $\forall E\in\mathcal{B}(X)$ $\exists A$ aperto, C chiuso $C\subset E\subset A$ t.c. $\mu(A\setminus C)\leq\varepsilon$)
Ad esempio, basta che
$\exists X_n$ aperti t.c. $\mu(X_n)<+\infty$, $X_n\uparrow X$ e $X_n\supset\overline{X_{n-1}}$ $\forall n$

MISURE PRODOTTO

Siano $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ spazi di misura.
$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ σ-algebra prodotto su $X = X_1 \times X_2 = \sigma(\mathcal{F})$
con $\mathcal{F} = \{E_1 \times E_2 \mid E_1 \in \mathcal{M}_1, E_2 \in \mathcal{M}_2\}$

Dico che μ misura su $\mathcal{M}$ è una misura prodotto se
$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2) \quad \forall E_1 \in \mathcal{M}_1, E_2 \in \mathcal{M}_2$
(con la convenzione $(+\infty) \cdot 0 = 0$)

Teorema Se μ_1 e μ_2 sono finite, allora
$\exists !\ \mu$ misura prodotto $(\mu = \mu_1 \times \mu_2)$.
Inoltre $\forall E \in \mathcal{M}$:
(1) $\forall x_1 \in X_1 \quad E^{x_1} := \{x_2 \mid (x_1, x_2) \in E\} \in \mathcal{M}_2$
(2) $x_1 \longmapsto \mu_2(E^{x_1})$ è $\mathcal{M}_1$-misurabile
(3) $\forall x_2 \in X_2 \quad E_{x_2} := \{x_1 \mid (x_1, x_2) \in E\} \in \mathcal{M}_1$
(4) $x_2 \longmapsto \mu_1(E_{x_2})$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile
(5) $\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2(E^{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(E_{x_2})\, d\mu_2(x_2)$.

Lemma Supponendo solo μ_2 finita, valgono (1) e (2) $\forall E \in \mathcal{M}$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{G} = \{E \in \mathcal{M} \mid$ vale (1) e (2)$\}$
- $\mathcal{G}$ è un λ-sistema:
  (1) $X \in \mathcal{G}$ chiaro
  (2) $A, A' \in \mathcal{G} \Rightarrow A^{x_1}, (A')^{x_1} \in \mathcal{G} \Rightarrow (A')^{x_1} \setminus A^{x_1} = (A' \setminus A)^{x_1} \in \mathcal{G}$
  $\mu_2((A' \setminus A)^{x_1}) = \mu_2((A')^{x_1}) - \mu_2(A^{x_1})$
  (3) facile
- $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ ovvio
- $\mathcal{F}$ chiuso per intersezione

$\Longrightarrow \mathcal{G} \supset \lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \mathcal{G} = \mathcal{M}$ □

Lemma $\forall E \in \mathcal{M}$ sia
$\tilde{\mu}(E) = \int_{x_1 \in X_1} \mu_2(E^{x_1})\, d\mu_1(x_1)$.
Allora $\tilde{\mu}$ è ben definita ed è una misura
(ed è una misura prodotto).

DIMOSTRAZIONE

Sia $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$ disgiunti con $E = \bigcup_n E_n$
$$\sum_n \tilde{\mu}(E_n) = \sum_n \int_{x_1 \in X_1} \mu_2(E^{x_1})\, d\mu_1(x_1) \underset{\text{conv. mon.}}{=} \int_{x_1 \in X_1} \sum_n \mu_2(E_n^{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \int_{x_1 \in X_1} \mu_2(E^{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \tilde{\mu}(E)$$ □

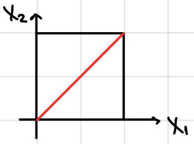
DIMOSTRAZIONE (TEO)

UNICITA': date μ e $\tilde{\mu}$ misure prodotto, allora
per definizione μ e $\tilde{\mu}$ coincidono su $\mathcal{Y}$ generatori di $\mathcal{M}$
che è chiuso per intersezione e $\mathcal{Y} \ni X$
$\Rightarrow \mu = \tilde{\mu}$ su X

ESISTENZA segue dal lemma
(1), (2), (3), (4) seguono dal lemma
(5) segue dai lemmi. $\square$

Senza l'ipotesi di finitezza, può succedere che
sia $\tilde{\mu}_1$ sia $\tilde{\mu}_2$ siano ben definite ma non coincidono

esempio $X_1 = X_2 = [0,1]$, $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 = \mathcal{B}(X)$, $\mu_1 = \mathcal{L}^1$, $\mu_2 = \mathcal{H}^0$



$\tilde{\mu}_1(D) = \int \mu_2(\{x_1\})\,dx = 1$
$\tilde{\mu}_2(D) = 0$

Oss Il Teorema vale anche se μ_1, μ_2 σ-finite. (EX)

Oss $\mu_1 \times \mu_2$ può non essere completa, anche se μ_1 e μ_2 lo sono

esempio $X_1 = X_2 = [0,1]$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{Leb}$ $\mu_1 = \mu_2 = \mathcal{L}^1$
$E = E_1 \times \{\frac{1}{2}\}$ con $E_1 \notin \mathcal{M}_{Leb}$ $\Rightarrow E \notin \mathcal{M}_{Leb}$
ma E è contenuto nel segmento, che ha misura nulla.

Se prendo $\overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu}$ completamento di $\mathcal{M}, \mu$:

Teorema Se μ_1 e μ_2 sono finite, allora
$\exists!\ \mu$ misura prodotto $(\mu = \mu_1 \times \mu_2)$.
Inoltre $\forall E \in \overline{\mathcal{M}}$:
(1) μ_1-q.o. $x_1 \in X_1$ $E^{x_1} := \{x_2 \mid (x_1, x_2) \in E\} \in \mathcal{M}_2$
(2) $x_1 \longmapsto \mu_2(E^{x_1})$ è $\mathcal{M}_1$-misurabile a meno di misura nulla
(3) μ_2-q.o. $x_2 \in X_2$ $E_{x_2} := \{x_1 \mid (x_1, x_2) \in E\} \in \mathcal{M}_1$
(4) $x_2 \longmapsto \mu_1(E_{x_2})$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile a meno di misura nulla
(5) $\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2(E^{x_1})\,d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(E_{x_2})\,d\mu_2(x_2)$.

Teorema di Fubini-Tonelli (V1)

Siano μ_1, μ_2 σ-finite, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$

$\forall f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ $\mathcal{M}$-misurabile, allora

(1) $\forall x_1 \in X_1$ $\quad f_{x_1}(\cdot) := f(x_1, \cdot)$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile

(2) $x_1 \longmapsto \int_{X_2} f(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)$ è $\mathcal{M}_1$-misurabile

(3) $\forall x_2 \in X_2$ $\quad f_{x_2}(\cdot) := f(\cdot, x_2)$ è $\mathcal{M}_1$-misurabile

(4) $x_2 \longmapsto \int_{X_1} f(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile

(5) $\int_X f\, d\mu = \int_{X_1} \int_{X_2} f(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \int_{X_1} f(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)\, d\mu_2(x_2)$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{H} := \{ f : X \longrightarrow [0,+\infty] \mid$ valgono (1)-(5)$\}$.

- $\mathcal{H} \ni \mathbb{1}_E \ \forall E \in \mathcal{M}$ per il Teo. precedente
- $\mathcal{H} \supset \{$funzioni semplici$\}$ ($\mathcal{H}$ è chiuso per somma e prodotto per cost ≥ 0)
- $\mathcal{H} \supset \{$funzioni misurabili$\}$ ($\mathcal{H}$ è chiuso per conv. puntuale crescente)

Sia $f_n \in \mathcal{H}\ \forall n$, $f_n \uparrow f$

$f_n \in \mathcal{H} \Rightarrow$ vale (1): $\forall x_1$ $f_n(x_1,\cdot)$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile

$\Longrightarrow f_n(x_1,\cdot) \uparrow f(x_1,\cdot) \quad \Longrightarrow f(x_1,\cdot)$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile

vale (2): $x_1 \longmapsto \int_{X_2} f_n(x_1,\cdot)\, d\mu_2$ è misurabile

$\xRightarrow[\text{conv. mon}]{} \int_{X_2} f_n(x_1,\cdot)\, d\mu_2 \nearrow \int_{X_2} f(x_1,\cdot)\, d\mu_2$

vale (5): $\int_X f_n\, d\mu = \int_{X_1}\int_{X_2} f_n\, d\mu_2\, d\mu_1$

$\downarrow \qquad \downarrow$ per conv. mon.

$\int_X f\, d\mu \qquad \int_{X_1}\int_{X_2} f\, d\mu_2\, d\mu_1$

□

Teorema di Fubini-Tonelli (V2)

Siano μ_1, μ_2 σ-finite, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$

$\forall f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrabile, allora

(1) $\exists N_1 \in \mathcal{M}_1$, $\mu_1(N_1) = 0$, t.c. $\forall x_1 \in X_1 \setminus N_1$ $f_{x_1}(\cdot) := f(x_1,\cdot)$ è integrabile

(2) $X_1 \setminus N_1 \ni x_1 \longmapsto \int_{X_2} f(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)$ è $\mathcal{M}_1$-misurabile

(3) $\exists N_2 \in \mathcal{M}_2$, $\mu_2(N_2) = 0$, t.c. $\forall x_2 \in X_2 \setminus N_2$ $f_{x_2}(\cdot) := f(\cdot, x_2)$ è integrabile

(4) $X_2 \setminus N_2 \ni x_2 \longmapsto \int_{X_1} f(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile

(5) $\int_X f\, d\mu = \int_{X_1} \int_{X_2} f(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \int_{X_1} f(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)\, d\mu_2(x_2)$

DIMOSTRAZIONE

f integrabile $\Longrightarrow \int f^+ d\mu < +\infty$ oppure $\int f^- d\mu < +\infty$

$\xRightarrow{FT} \int_X f^+ d\mu = \int_{X_1}\int_{X_2} f^+(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)\, d\mu_1(x_1) < +\infty$

$\Longrightarrow \int_{X_2} f^+(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2) < +\infty$ per μ_1-q.o. $x_1 \in X_1$

□

Teorema di Fubini-Tonelli (V3)

Siano μ_1, μ_2 σ-finite, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, F Banach separabile
$\forall f : X \longrightarrow F$, $f \in L^1(\mu, F)$, allora
(1) $\exists N_1 \in \mathcal{M}_1$, $\mu_1(N_1) = 0$, t.c. $\forall x_1 \in X_1 \setminus N_1$ $f_{x_1}(\cdot) := f(x_1, \cdot) \in L^1(\mu_2, F)$
(2) $X_1 \setminus N_1 \ni x_1 \longmapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)$ è $\mathcal{M}_1$-misurabile
(3) $\exists N_2 \in \mathcal{M}_2$, $\mu_2(N_2) = 0$, t.c. $\forall x_2 \in X_2 \setminus N_2$ $f_{x_2}(\cdot) := f(\cdot, x_2) \in L^1(\mu_1, F)$
(4) $X_2 \setminus N_2 \ni x_2 \longmapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile
(5) $\int_X f\, d\mu = \int_{X_1} \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\, d\mu_2(x_2)$

DIMOSTRAZIONE

$f \in L^1(\mu, F) \implies \int_X |f|\, d\mu < +\infty$

$\overset{FTV1}{\implies} \int_{X_1} \int_{X_2} |f|\, d\mu_2\, d\mu_1 < +\infty$

$\implies \int_{X_2} |f|\, d\mu_2 < +\infty$ per μ_2-q.o. $x_1 \in X_1$ $\square$

Lemma $(X, \mathcal{M}, \mu)$, F Banach separabile.
Data $f : X \longrightarrow F$, sono fatti equivalenti:
- f è misurabile
- $T \circ f$ è misurabile $\forall T \in F^*$
- $T \circ f$ è misurabile $\forall T \in D$ denso in F^*

Inoltre $\forall f \in L^1(\mu, F)$, $T\left(\int_X f\, d\mu\right) = \int_X T \circ f\, d\mu$ $\forall T \in F^*$

Per il completamento della misura prodotto, l'enunciato non cambia.

Casi particolari

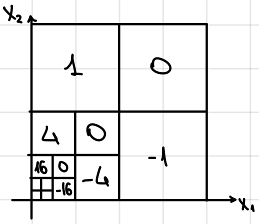
Se $\forall n,m \in \mathbb{N}$ $a_{n,m} \geq 0$ o $\sum |a_{n,m}| < +\infty \Rightarrow \sum_m \left(\sum_n a_{n,m}\right) = \sum_n \left(\sum_m a_{n,m}\right) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_{n,m}$

Se $f_n \geq 0$ o $\sum \|f_n\|_{L^1} < +\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu$

Commenti

(1) Senza ipotesi su f, la formula può non valere

esempio $X_1 = X_2 = [0,1]$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{B}([0,1])$, $\mu_1 = \mu_2 = \mathcal{L}^1$



$\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1 = \frac{1}{2} \quad \forall x_2 \in X_2$

$\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_2 = -\frac{1}{2} \quad \forall x_1 \in X_1$

$\int f^+(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \int f^-(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = +\infty$

(2) Prendo $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$

Sia $\tilde{\mu}$ la misura esterna su X data dalla costruzione di Caratheodory con $\mathcal{F} = \{E_1 \times E_2 \mid E_1 \in \mathcal{M}_1, E_2 \in \mathcal{M}_2\}$, $\rho(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\,\mu_2(E_2)$

Proposizione Se μ_1, μ_2 sono finite (o σ-finite),
$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\tilde{\mu}}$ e $\mu = \tilde{\mu}$ su $\mathcal{M}$

Lemma 1 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_{\tilde{\mu}}$ $(\Rightarrow \mathcal{M} = \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}_{\tilde{\mu}})$

Lemma 2 $\tilde{\mu}(E) = \rho(E) \quad \forall E \in \mathcal{F}$

Lemma 3 Date $\mathcal{F}$ e ρ come nella costruzione di Caratheodory t.c.
(1) $\mathcal{F}$ è chiuso per intersezione finita
(2) $\forall F_0 \in \mathcal{F}$ $\exists F_1, \dots, F_N \in \mathcal{F}$ t.c. $F_0^c = \bigcup_{0 \le i \le N} F_i$, $\forall E \in \mathcal{F}$ $\rho(E) \underset{(=)}{\geq} \sum_{n=0}^{N} \rho(E \cap F_n)$
Allora $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_\mu$ (μ misura generata da $\mathcal{F}$ e ρ).

DIMOSTRAZIONE (3)

Da (1) e (2) ottengo $\sum_{n=0}^{N} \mu(E \cap F_n) \leq \mu(E) \quad \forall E \subset X$
$\Rightarrow F_n \in \mathcal{M}_\mu \ \forall n \Rightarrow F_0 \in \mathcal{M}_\mu$

Infatti, dato $\{E_i\} \subset \mathcal{F}$ tc $E \subset \bigcup_i E_i$, vale $\rho(E_i) \geq \sum_{n=0}^{N} \rho(E_i \cap F_n)$
$\Rightarrow \sum_i \rho(E_i) \geq \sum_i \sum_{n=0}^{N} \rho(E_i \cap F_n) = \sum_{n=0}^{N} \sum_i \rho(E_i \cap F_n) \geq \sum_{n=0}^{N} \mu(E \cap F_n) \Rightarrow \mu(E) \geq \sum_{n=0}^{N} \mu(E \cap F_n)$.

DIMOSTRAZIONE (2)

Devo mostrare che $\forall E = E_1 \times E_2$, $\forall (E^i) = (E_1^i \times E_2^i) \subset \mathcal{F}$ $\rho(E) \leq \sum_i \rho(E_i)$
In effetti, $\rho(E) = \mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i) = \sum_i \rho(E^i)$.

DIMOSTRAZIONE (1)

Segue dal lemma (3). $\square$

(3) Questa costruzione si può applicare anche nel caso in cui μ_1 e μ_2 non sono σ-finite.

Proposizione $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\tilde{\mu}}$ e $\tilde{\mu}$ ristretta a $\mathcal{M}$ è una misura prodotto

DIMOSTRAZIONE

Il lemma 1 è analogo.
Per il lemma 2, devo far vedere che $\forall E \in \mathcal{F}, \forall (E^i) \subset \mathcal{F}$ $\rho(E) \leq \sum_i \rho(E^i)$
Possiamo supporre $\sum_i \rho(E_i) < +\infty$.
Pongo $\tilde{X}_1 = \bigcup_i E_1^i$, $\tilde{X}_2 = \bigcup_i E_2^i$; restringendo μ_1 e μ_2, sono σ-finite
Quindi su $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$ la misura prodotto esiste ed è unica. $\square$

Può succedere $\mu(E) > \int_{X_2} \mu_1(E^{x_2})\, d\mu_2(x_2)$
$> \int_{X_1} \mu_2(E^{x_1})\, d\mu_1(x_1)$

(4) Siano $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$, $i \in I$, spazi di probabilità
Allora $\exists!\ \mu$ misura di probabilità su $\mathcal{M} := \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$
t.c. $\forall E \in \mathcal{F}$ $\mu(E) = \prod_{i \in I} \mu_i(E_i) = \prod_{i \in I'} \mu_i(E_i)$

$\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{F})$ con $\mathcal{F} = \{\prod_{i \in I} E_i \mid E_i \in \mathcal{M}_i \forall i,\ E_i = X_i\ \forall i \in I \setminus I',\ I' \text{ finito}\}$

Sia $\tilde{\mu}$ la misura esterna su $X = \prod X_i$ data dalla costruzione di Caratheodory con $\mathcal{F}$ e ρ come sopra
Allora (1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_{\tilde{\mu}} \Rightarrow \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\tilde{\mu}}$
(2) $\forall E \in \mathcal{F}$ $\tilde{\mu}(E) = \rho(E)$
cioè $\forall E = E_1 \times E_2, \forall (E^i) = (E_1^i \times E_2^i) \subset \mathcal{F}$ (*)
$\rho(E) \leq \sum \rho(E_i)$
(*) vale se X_i spazi metrici compatti, $\mathcal{M}_i \supset \mathcal{B}(X_i)$, μ_i regolari
Usando la regolarità, ci si riduce a dimostrare che
$\forall E = \prod K_i$ con compatti, $\forall E_j = \prod A_{ij}$ con A_{ij} aperti t.c. $E \subset \bigcup E_j$
vale $\rho(E) \leq \sum_j \rho(E_j)$ (con il Teorema di Tychonov).

MISURE SINGOLARI E ASSOLUTAMENTE CONTINUE

Notazione
- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio di misura, $f: X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabile
  $f\mu$ è la misura data da $f\mu(E) := \int_E f\,d\mu$
- Dato $X' \in \mathcal{M}$, $\mu \llcorner X'$ restrizione di μ a X'
  Sia come misura su X $(\mu \llcorner X' = 1\!\!1_{X'} \cdot \mu)$ o
  come misura su X' con la σ-algebra $\mathcal{M}' = \{E \in \mathcal{M} \mid E \subset X'\}$
- Dato $E \in \mathcal{M}$, dico che μ è supportata su E se $\mu(E^c) = 0$,
  cioè $\mu = \mu \llcorner E$, cioè $\mu(A) = 0$ $\forall A \subset E^c$
- Se X spazio topologico II numerabile e $\mathcal{M} \supset \mathcal{B}(X)$, il supporto di μ è
  il più piccolo chiuso C t.c. μ è supportata su C
  (esiste; non esiste il più piccolo $E \in \mathcal{M}$ t.c. μ è supportata su E)
  esempio $(\mathbb{R}, \tau_{disc}), \mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } |E| \leq \aleph_0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

DEF. Siano λ, μ misure su $(X, \mathcal{M})$.
λ e μ sono mutualmente singolari (o anche
λ/μ è singolare rispetto a μ/λ) e scrivo $\lambda \perp \mu$ se
(1) λ e μ sono supportate su due insiemi misurabili disgiunti

Oss (1) è equivalente a ciascuno dei seguenti:
(2) $\exists E \in \mathcal{M}$ t.c. $\lambda(E) = 0$, $\mu(E^c) = 0$
(3) μ è supportato su un insieme λ-nullo
(4) λ è supportato su un insieme μ-nullo

esempio Sia $X = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}([0,1])$
- $\delta_0 \perp \mathcal{L}^1$ $\quad$ $(\operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}$, $\operatorname{supp} \mathcal{L}^1 = [0,1])$
- $\mathcal{H}^0 \llcorner \mathbb{Q} \perp \mathcal{L}^1$
- $\mathcal{H}^0 \not\perp \mathcal{L}^1$

DEF. Siano λ, μ misure su $(X, \mathcal{M})$
Dico che λ è assolutamente continua rispetto a μ,
e scrivo $\lambda \ll \mu$, se
$\forall E \in \mathcal{M}$ $\mu(E) = 0 \implies \lambda(E) = 0$
(la definizione ha senso anche per misure esterne)

esempio
- Se $\lambda \perp \mu$, $\lambda \ll \mu$, allora $\lambda = 0$
- $f\mu \ll \mu$ perché $\mu(E) = 0 \implies \int_E f\,d\mu = 0$
- su $[0,1]$, $\mathcal{L}^1 \ll \mathcal{H}^0$
- In generale, su X spazio metrico, $\mathcal{H}^a \ll \mathcal{H}^b$ se $a \geq b$
- $\mu_1 \ll \mu_2$, $\mu_2 \ll \mu_3 \implies \mu_1 \ll \mu_3$ (ma $\mu \ll \lambda$, $\lambda \ll \mu \not\Rightarrow \mu = \lambda$)

Oss Date $f_1, f_2 : X \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabili, valgono:
- $f_1\mu \leq f_2\mu \iff f_1 \leq f_2$ μ-q.o.
- $f_1\mu \ll f_2\mu \iff \mu(\{x : f_2(x) = 0, f_1(x) > 0\}) = 0$
- $f_1\mu \perp f_2\mu \iff \exists E$ tc μ-q.o. $x \in E$ $f_1(x) = 0$, μ-q.o. $x \in E^c$ $f_2(x) = 0$

Oss
- Se $\lambda \ll \mu$, allora $f\lambda \ll \mu$ $\forall f$
- Se $\lambda_n \ll \mu$ $\forall n$, allora $\sum_n \lambda_n \ll \mu$
- Se $\mathcal{F}$ famiglia di misure λ, con $\lambda \ll \mu$, e $\bar{\lambda} = \bigvee_{\lambda \in \mathcal{F}} \lambda$, allora $\bar{\lambda} \ll \mu$
- Se $\lambda \perp \mu$, allora $f\lambda \perp g\mu$ $\forall f, g$
- Se $\lambda_n \perp \mu$ $\forall n$, allora $\sum_n \lambda_n \perp \mu$
- Sia $\mathcal{F}$ famiglia di misure $\lambda \perp \mu$, e sia $\bar{\lambda} = \bigvee_{\lambda \in \mathcal{F}} \lambda$, è vero $\bar{\lambda} \perp \mu$?
  (Hint: $\mathcal{H}^0 \not\perp \mathcal{L}^1$)

Teorema: decomposizione di Hahn

Siano λ, μ misure su $(X, \mathcal{M})$ con λ σ-finita. Allora $\exists \lambda_a, \lambda_s$ misure su $\mathcal{M}$ t.c.
(1) $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$
(2) $\lambda_a \ll \mu$
(3) $\lambda_s \perp \mu$
Inoltre, la decomposizione è unica.

Oss Serve λ σ-finita: sia $X = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda = \mathcal{H}^0$, $\mu = \mathcal{L}^1$

Teorema di Radon-Nikodym

Siano λ, μ misure su $(X, \mathcal{M})$ con μ σ-finita e $\lambda \ll \mu$. Allora esiste $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabile t.c. $\lambda = f\mu$, unica a meno di insiemi μ-nulli.

Oss Serve μ σ-finita: sia $X = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda = \mathcal{L}^1$, $\mu = \mathcal{H}^0$

NOTA f è detta densità di Radon-Nikodym di λ rispetto a μ.

Lemma 1

Sia $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ con $\lambda_a \ll \mu$, $\lambda_s \perp \mu$.
Allora dato $A \in \mathcal{M}$ μ-nullo t.c. λ_s è supportato su A vale $\lambda_s = \lambda \llcorner A$ e $\lambda_a = \lambda \llcorner (X \setminus A)$.

DIMOSTRAZIONE

$\lambda_a \ll \mu \Longrightarrow \lambda_a(A) = 0 \Longrightarrow \lambda_a \llcorner A = 0$

$\forall E \in \mathcal{M}$ $\lambda \llcorner A(E) = \lambda(A \cap E) = \overset{=0}{\lambda_a(A \cap E)} + \lambda_s(A \cap E) = \lambda_s(E)$

cioè $\lambda \llcorner A = \lambda_s$

Analogamente, $\lambda \llcorner (X \setminus A) = \lambda_a$

$\forall E \in \mathcal{M}$ $\lambda \llcorner A^c(E) = \lambda(A^c \cap E) = \lambda_a(A^c \cap E) + \overset{\emptyset}{\lambda_s(A^c \cap E)} = \lambda_a(E)$

segue dal fatto $\lambda_a(E \cap A) = 0$

$\square$

DIMOSTRAZIONE (unicità Hahn)

Siano λ_a', λ_s' un'altra decomposizione di λ.

$\lambda_s, \lambda_s' \perp \mu \implies \exists A, A'$ μ-nulli t.c. λ_s è supportata su A,
λ_s' è supportata su A'.

Posso sostituire A e A' con $A \cup A' = \bar{A}$

Per il lemma 1: $\lambda_s = \lambda \llcorner \bar{A} = \lambda_s'$, $\lambda_a = \lambda \llcorner \bar{A}^c = \lambda_a'$ $\square$

Lemma 2 Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$ chiusa per unione numerabile, λ misura finita su $\mathcal{M}$.
Allora esiste $\bar{A} \in \mathcal{F}$ t.c. $\forall A \in \mathcal{F}$, $\lambda(A \setminus \bar{A}) = 0$

DIMOSTRAZIONE

Sia $m = \sup\{\lambda(A) \mid A \in \mathcal{F}\} \leq \lambda(X) < +\infty$

$\implies \exists A_n \in \mathcal{F}$ t.c. $\lambda(A_n) \nearrow m$.

Sia $\bar{A} = \bigcup_n A_n$, allora $\bar{A} \in \mathcal{F}$, $\bar{A} \supset A_n \ \forall n \implies \lambda(\bar{A}) \geq \lambda(A_n) \ \forall n \implies \lambda(\bar{A}) = m$

Sia ora $A \in \mathcal{F}$: se per assurdo $\lambda(A \setminus \bar{A}) > 0$, allora
$A \cup \bar{A} \in \mathcal{F}$ e $\lambda(A \cup \bar{A}) = \lambda(\bar{A}) + \lambda(A \setminus \bar{A}) > m$ $\lightning$ $\square$

DIMOSTRAZIONE (esistenza Hahn)

Sia λ finita

Prendo $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{M} \mid \mu(A) = 0\}$: per il lemma 2, $\exists \bar{A} \in \mathcal{F}$ massimale.

Quindi $\lambda(A \setminus \bar{A}) = 0 \ \forall A \in \mathcal{F}$

Definisco $\lambda_s = \lambda \llcorner \bar{A}$, $\lambda_a = \lambda \llcorner \bar{A}^c$: so che $\lambda_s \perp \mu$ (perché $\bar{A}$ μ-nullo)

Se per assurdo $\lambda_a \not\ll \mu$, allora $\exists A$ μ-nullo con $\lambda_a(A) > 0$
$\implies \lambda(A \setminus \bar{A}) > 0$ $\lightning$

Sia λ σ-finita.

$\implies \exists X_n \in \mathcal{M}$, $\lambda(X_n) < +\infty$, $\lambda(X \setminus \bigcup X_n) = 0$

Posso supporre X_n disgiunti

$\lambda \llcorner X_n$ è finita $\implies \exists \bar{A}_n \subset X_n$ t.c. $(\lambda \llcorner X_n)_s = \lambda \llcorner \bar{A}_n \perp \mu$, $(\lambda \llcorner X_n)_a = \lambda \llcorner X_n \setminus \bar{A}_n \ll \mu$.

Considero $\bar{A} = \bigcup \bar{A}_n$: $\lambda \llcorner \bar{A} = \sum_n \lambda \llcorner \bar{A}_n \perp \mu$ e $\lambda \llcorner X \setminus \bar{A} = \sum_n \lambda \llcorner (X_n \setminus \bar{A}_n) \ll \mu$. $\square$

<u>Punto chiave</u>: trovare $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) > 0$ e $\delta > 0$ t.c. $\delta(\mu \llcorner E) \leq \lambda$, cioè $\delta 1\!\!1_E \mu \leq \lambda$

Lemma 3 Sia μ misura finita, $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ famiglia disgiunta di insiemi di misura strettamente positiva.
Allora $|\mathcal{G}| \leq \aleph_0$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{G}_n = \{E \in \mathcal{G} : \mu(E) > \frac{1}{n}\} \nearrow \mathcal{G}$. Allora
$\frac{1}{n}|\mathcal{G}_n| \leq \sum_{E \in \mathcal{G}_n} \mu(E) \leq \sum_{E \in \mathcal{G}} \mu(E) \leq \mu(X)$

$\implies |\mathcal{G}_n| < +\infty \ \forall n \implies \mathcal{G} = \bigcup_n \mathcal{G}_n$ è t.c. $|\mathcal{G}| \leq \aleph_0$. $\square$

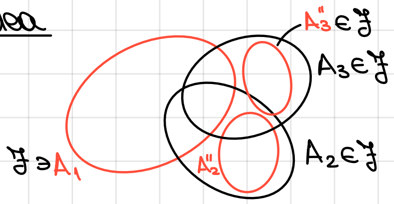
Lemma 4 Sia μ misura finita su $(X,\mathcal{M})$. Sia $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{M}$ t.c.

(a) $\mathcal{F}$ è chiusa per unione numerabile disgiunta

(b) $\forall A\in\mathcal{F}$, $\forall A'\in\mathcal{M}$ con $A'\subset A$ e $\mu(A')>0$, $\exists A''\in\mathcal{F}$ t.c. $A''\subset A'$ e $\mu(A'')>0$

Allora $\exists\bar{A}\in\mathcal{F}$ t.c. $\forall A\in\mathcal{F}$ $\mu(\bar{A})\geq\mu(A)$ e $\mu(A\setminus\bar{A})=0$.

<u>Idea</u>



$\bar{A}=A_1\cup A_2''\cup A_3''\cup\dots$

DIMOSTRAZIONE

Prendo $\mathcal{F}^*=\{A\in\mathcal{F}:\mu(A)>0\}$

Prendo $\mathcal{G}$ sottofamiglia disgiunta di $\mathcal{F}^*$ massimale rispetto all'inclusione. (esiste per il lemma di Zorn).

μ finita $\Longrightarrow$ $\mathcal{G}$ numerabile per il Lemma 3

Prendo $\bar{A}=\bigcup_{A\in\mathcal{G}}A$: $\bar{A}\in\mathcal{F}$ per (a).

Dato $A\in\mathcal{F}$, se per assurdo fosse $\mu(A\setminus\bar{A})>0$, allora $\exists A''\subset A\setminus\bar{A}$, $A''\in\mathcal{F}$ con $\mu(A'')>0$

Ma allora $\mathcal{G}\cup\{A''\}\supsetneq\mathcal{G}$ contraddice la massimalità di $\mathcal{G}$ ↯ $\square$

Lemma 5 Siano λ,μ misure su $(X,\mathcal{M})$ con μ finita, $\lambda\neq0$ e $\lambda\ll\mu$

Allora $\exists E\in\mathcal{M}$ con $\mu(E)>0$ e $\delta>0$ t.c.
$$\delta(\mu\llcorner E)\leq\lambda.$$

DIMOSTRAZIONE

Fisso δ con $0<\delta\leq\frac{\lambda(X)}{\mu(X)}$.

Dimostro per assurdo che $\exists E\in\mathcal{M}$, $\mu(E)>0$ t.c. vale la tesi, cioè $\exists E\in\mathcal{M}$, $\mu(E)>0$ t.c. $\forall E'\subset E$ $\delta\mu(E')\leq\lambda(E')$

Se così non fosse, $\forall E\in\mathcal{M}$, $\mu(E)>0$, $\exists E'\subset E$ t.c. $\lambda(E')<\delta\mu(E')$ (cioè $E'\in\mathcal{F}$)

Pongo $\mathcal{F}=\{A\in\mathcal{M}:\lambda(A)<\delta\mu(A)\}$: $X\notin\mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ soddisfa le ipotesi del Lemma 4

Ma allora $\exists\bar{A}\in\mathcal{F}$ t.c. $\mu(A\setminus\bar{A})=0$ $\forall A\in\mathcal{F}$.

Per la massimalità di $\bar{A}$, $X\setminus\bar{A}$ non contiene elementi di $\mathcal{F}$, quindi $\mu(X\setminus\bar{A})=0$.

Quindi $\lambda(X\setminus\bar{A})=0$ (poiché $\lambda\ll\mu$), ma allora $\lambda(X)=\lambda(\bar{A})<\delta\mu(\bar{A})=\delta\mu(X)$

Quindi $X\in\mathcal{F}$ ↯ $\square$

Lemma 6 Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $f: X \to [0,+\infty]$ misurabili chiusa per $\vee$ e per limite di successioni crescenti.
($f_1, f_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow f_1 \vee f_2 \in \mathcal{F}$; $f_n \in \mathcal{F}\ \forall n,\ f_n \nearrow f \Rightarrow f \in \mathcal{F}$).
Sia μ misura finita.
Allora $\exists \bar{f} \in \mathcal{F}$ t.c. $\bar{f} \geq f$ μ-q.o. $\forall f \in \mathcal{F}$.

DIMOSTRAZIONE
Posso assumere che $f \leq 1$ $\forall f \in \mathcal{F}$ (basta sostituire $f \in \mathcal{F}$ con $\frac{2}{\pi}\arctan(f)$).
Prendo $\bar{f} \in \mathcal{F}$ che massimizza l'integrale rispetto a μ, cioè prendo $m := \sup\{\int_X f\,d\mu : f \in \mathcal{F}\}$, prendo $(f_n) \subset \mathcal{F}$ t.c. $\int_X f_n\,d\mu \nearrow m$. Posso supporre (f_n) sia crescente (poiché $\mathcal{F}$ è chiusa per $\vee$)
il limite $\bar{f} \in \mathcal{F}$ e $\int_X \bar{f}\,d\mu = m$ per convergenza monotona.
Si verifica facilmente che $\bar{f} \geq f$ μ-q.o. $\forall f \in \mathcal{F}$
Infatti, se esistesse $f \in \mathcal{F}$ t.c. non vale $\bar{f} \geq f$ μ-q.o., allora $\bar{f} \vee f \in \mathcal{F}$ contraddice la massimalità dell'integrale. $\square$

Lemma 7 Sia μ misura finita su $(X, \mathcal{M})$
Date $f_1, f_2 : X \to [0,+\infty]$ misurabili t.c. $f_1\mu = f_2\mu$ allora $f_1 = f_2$ μ-q.o.

DIMOSTRAZIONE
Sia $E = \{x \mid f_1(x) < f_2(x)\}$ e $\forall s > 0$ sia $E_s := \{x \in E \mid f_1(x) \leq s\}$
La tesi si riduce a dimostrare che $\mu(E) = 0$, che segue da $\mu(E_s) = 0$ $\forall s > 0$, poiché $E = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} E_s$
So che $f_1\mu = f_2\mu \Rightarrow \underbrace{\int_{E_s} f_1\,d\mu}_{\neq +\infty} = \int_{E_s} f_2\,d\mu \Rightarrow 0 = \int_{E_s} \underbrace{f_2 - f_1}_{>0}\,d\mu$
$\Rightarrow \mu(E_s) = 0$ $\square$

DIMOSTRAZIONE (teo) per μ finita
<u>ESISTENZA</u>: Sia $\mathcal{F} = \{f : X \to [0,+\infty]$ misurabili t.c. $f\mu \leq \lambda\}$
Osservo che $\mathcal{F}$ soddisfa le ipotesi del lemma 6.
Allora $\exists \bar{f} \in \mathcal{F}$ t.c. $\bar{f} \geq f$ μ-q.o. $\forall f \in \mathcal{F}$.
Dimostro che $\bar{f}\mu = \lambda$.
Se per assurdo così non fosse, $\exists X' \in \mathcal{M}$ t.c. $\bar{f}\mu(X') < \lambda(X')$, cioè $\bar{f}\mu \llcorner X' \leq \lambda \llcorner X'$ e $\neq$.
Allora $\lambda' = \lambda \llcorner X' - \bar{f}\mu \llcorner X'$ è una misura positiva ben definita, $\lambda' \neq 0$, $\lambda' \ll \mu$.
Per il lemma 5, $\exists E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) > 0$ e $\delta > 0$ t.c. $\delta 1_E \mu \leq \lambda'$.
(posso supporre $E \subset X'$)
Ma allora $(\bar{f} + \delta 1_E)\mu \leq \lambda$, quindi $\bar{f} + \delta 1_E \in \mathcal{F}$ ma $\bar{f} + \delta 1_E > \bar{f}$ su E, $\mu(E) > 0$, che contraddice la massimalità di $\bar{f}$. $\lightning$
<u>UNICITÀ</u>: segue dal lemma 7.
DIMOSTRAZIONE (teo) per μ σ-finita
Per ipotesi, $X = \bigcup^{\circ} X_n$ con $\mu(X_n) < +\infty$. Dette $\mu_n = \mu \llcorner X_n$ e $\lambda_n = \lambda \llcorner X_n$, vale $\lambda_n = f_n \mu_n$ con $f_n : X_n \to [0,+\infty]$ misurabile. Allora $f := \sum_n f_n$ è misurabile e t.c. $\lambda = f\mu$. $\square$

MISURE VETTORIALI

Sia $\mu: \mathcal{M} \longrightarrow F = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ o E Banach

Def. F spazio di Banach, $(y_n) \subset F$:

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ **converge** se $\exists y \in F$ t.c. $\sum_{n=0}^{N} y_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} y$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ **converge incondizionatamente** se $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ converge a y e $\sum_{n=0}^{+\infty} y_{\sigma(n)} = y$ $\forall \sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bigezione

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ **converge assolutamente** se $\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|_F < +\infty$

Proposizione (i) (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a);

(ii) (b) $\Rightarrow$ (c) se F ha dimensione finita (in particolare se $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$);

(iii) (a) $\not\Rightarrow$ (b);

(iv) (b) $\not\Rightarrow$ (c) se $F = \ell^2$;

(v) (b) $\not\Rightarrow$ (c) se F ha dimensione infinita (Teorema di Dvoretzki);

(vi) (b) $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{N}$ t.c. $\forall S \subset \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, \bar{N}\}$ finito vale $\left|\sum_{n\in S} y_n\right|_F \le \varepsilon$ (*).

DIMOSTRAZIONE

(i) (b) $\Rightarrow$ (a) ovvio

(c) $\Rightarrow$ (b). abbiamo già visto che (c) $\Rightarrow$ (a)

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{N}$ t.c. $\sum_{n=\bar{N}+1}^{+\infty} |y_n|_F \le \varepsilon$ e $\forall N \ge \bar{N}$ $\left|y - \sum_{n=0}^{\bar{N}} y_n\right| \le \varepsilon$

σ bigezione $\Rightarrow$ $\exists \tilde{N}$ t.c. $\sigma(\{0, \dots, \tilde{N}\}) \supset \{0, \dots, \bar{N}\}$

$\Rightarrow \forall N \ge \tilde{N}$ $\quad y - \sum_{n=0}^{N} y_{\sigma(n)} = y - \sum_{n=0}^{\bar{N}} y_n - \sum_{n \in \sigma(\{0,\dots,N\}) \setminus \{0,\dots,\bar{N}\}} y_n$

$\Rightarrow \left|y - \sum_{n=0}^{N} y_{\sigma(n)}\right|_F \le \left|y - \sum_{n=0}^{\bar{N}} y_n\right|_F + \sum_{n\in S..} |y_n|_F \le 2\varepsilon$

(ii) (per $F = \mathbb{R}$)

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ che non converge assolutamente

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n^+ < +\infty$ o $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n^- < +\infty$, è chiaro.

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n^- = +\infty$

Mostro che $\exists \sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bigezione tc $\sum_{n=0}^{+\infty} y_{\sigma(n)}$ non converge.

Indico con (n_k^+) la sottosuccessione degli indici n tale che $y_n \ge 0$ e con (n_k^-) la sottosuccessione degli n t.c. $y_n < 0$.

Poiché $\sum_{k=1}^{+\infty} y_{n_k^+} = +\infty$, esistono $k_1, k_2, \dots$ t.c.

$\sum_{k=1}^{k_1} y_{n_k^+} \ge 1$, $\sum_{k=k_1+1}^{k_1+k_2} y_{n_k^+} \ge 1$, $\sum_{k=k_1+k_2+1}^{k_1+k_2+k_3} y_{n_k^+} \ge 1, \dots$

Considero la permutazione σ con il seguente riordinamento di indici

$n_1^+, n_2^+, \dots, n_{k_1}^+, n_1^-, n_{k_1+1}^+, \dots, n_{k_1+k_2}^+, n_2^-, \dots$

Posto allora $m_1 = k_1$, $m_2 = k_1 + k_2 + 1$, $m_3 = k_1 + k_2 + k_3 + 2, \dots$

$\sum_{k=1}^{m_1} y_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{k_1} y_{n_k^+} \ge 1$, $\sum_{k=m_1+2}^{m_2} y_{\sigma(k)} = \sum_{k=k_1+1}^{k_1+k_2} y_{n_k^+} \ge 1$, $\sum_{k=m_2+2}^{m_3} y_{\sigma(k)} = \sum_{k=k_1+k_2+1}^{k_1+k_2+k_3} y_{n_k^+} \ge 1, \dots$

quindi $\sum_{k=1}^{+\infty} y_{\sigma(n)}$ non converge.

Per F di dimensione finita, F è linearmente isomorfo a $\mathbb{R}^d$ e si ragiona per componenti.

(iii) Si può riapplicare la costruzione precedente, oppure $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge ma non converge assolutamente, quindi per (ii) non converge incondizionatamente.

(iv) Sia $\{e_n\}$ la base canonica di ℓ^2.
Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e_n$

(a) converge a $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$
(b) converge incondizionatamente a y
(c) non converge assolutamente

(c) è ovvio, infatti $\sum_{n=1}^{+\infty} |\frac{1}{n} e_n|_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(a) segue dal fatto che $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e_n - y = (0, \_, 0, \frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+2}, \dots)$
$\Longrightarrow |\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e_n - y|_{\ell^2} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

(b) osservo che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{N}$ t.c. $\sum_{n=\bar{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon^2$
quindi $\forall S \subset \mathbb{N} \setminus \{1, \_, \bar{N}\}$ finito si ha $|\sum_{n \in S} \frac{1}{n} e_n|_{\ell^2} \leq \left(\sum_{n=\bar{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$
Ora la convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} y_{\sigma(n)}$ a y si dimostra come in (i).

(vi) $(*) \Longrightarrow (b)$: basta adattare la dimostrazione di (i)
non $(*) \Longrightarrow$ non (b):
$\exists \bar{\varepsilon} > 0$ t.c. $\forall N \ \exists S(N) \subset \mathbb{N} \setminus \{0, \_, N\}$ finito t.c. $|\sum_{n \in S(N)} y_n|_F \geq \bar{\varepsilon}$.

Definisco $S_0 := S(0)$, $n_0 := \# S_0$, $N_0 := \max S_0$
$S_1 := S(N_0)$, $n_1 := \# S_1$, $N_1 := \max S_1$
$S_2 := S(N_1)$, $n_2 := \# S_2$, $N_2 := \max S_2$
...

Considero ora un riordinamento di $\mathbb{N}$ t.c.

- $n_1, \dots, n_{n_0}$ sono gli indici in S_0
- $n_{n_0+1}, \dots, n_{N_0}$ sono gli indici in $\{0, \_, N_0\} \setminus S_0$
- $n_{N_0+1}, \dots, n_{N_0+n_1}$ sono gli indici in S_1
- $n_{N_0+n_1+1}, \dots, n_{N_0+N_1}$ sono gli indici in $\{N_0+1, \_, N_0+N_1\} \setminus S_1$
- ...

Presa σ corrispondente a questo riordinamento, ho che
$$|\sum_{n=1}^{n_0} y_{\sigma(n)}|_F = |\sum_{n \in S_0} y_n|_F \geq \bar{\varepsilon},$$
$$|\sum_{n=N_0+1}^{N_0+n_1} y_{\sigma(n)}|_F = |\sum_{n \in S_1} y_n|_F \geq \bar{\varepsilon}, \dots$$
quindi le somme parziali di $\sum_{n=0}^{+\infty} y_{\sigma(n)}$ non sono una successione di Cauchy, quindi la serie non converge. $\square$

Def. F Banach, $\mathcal{M}$ σ-algebra su X.
$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow F$ è una **misura vettoriale** a valori in F se
(1) $\mu(\emptyset) = 0$
(2) $\forall \{E_n\} \subset \mathcal{M}$ famiglia numerabile disgiunta con $E = \bigcup_n E_n$
$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n)$ (quindi la convergenza è incondizionata)

esempio Sia $\tilde{\mu}$ misura positiva su $\mathcal{M}$ e sia $f \in L^1(\tilde{\mu}, F)$, con F Banach separabile
Sia $\mu := \tilde{\mu} f$, cioè $\mu(E) = \int_E f \, d\tilde{\mu}$ $\forall E \in \mathcal{M}$
Allora μ è una misura vettoriale a valori in F.

Def. Data μ misura vettoriale a valori in F su $(X, \mathcal{M})$,
definisco la **variazione di μ** $|\mu|$ misura positiva su $(X, \mathcal{M})$ come
$\forall E \in \mathcal{M}$ $|\mu|(E) := \sup \{ \sum_n |\mu(E_n)|_F \mid \{E_n\} \subset \mathcal{M}$ partizione numerabile di $E \}$
Definisco la **massa** (o **variazione totale**)
$\mathbb{M}(\mu) = \|\mu\| := |\mu|(X)$

Proposizione Sia μ misura vettoriale a valori in F su $(X, \mathcal{M})$.
(a) $|\mu|$ è una misura
(b) $|\mu|$ è la più piccola misura positiva λ t.c.
$|\mu(E)|_F \leq \lambda(E)$ $\forall E \in \mathcal{M}$
(c) Se F è separabile e $\mu = f\tilde{\mu}$ con $\tilde{\mu}$ misura positiva su $\mathcal{M}$
e $f \in L^1(\tilde{\mu}; F)$, allora $|\mu| = |f|_F \tilde{\mu}$ e $\mathbb{M}(\mu) = \|f\|_{L^1}$
(d) Se $F = \mathbb{R}, \mathbb{R}^d$, finito dim, allora $\mathbb{M}(\mu) < +\infty$
(e) Se $F = \ell^2$ (o F Hilbert di dim. infinita), allora
$\mathbb{M}(\mu)$ può essere $+\infty$.
(f) Se F ha dimensione finita $\exists \rho : X \longrightarrow F$ misurabile t.c.
$|\rho(x)| = 1$ $|\mu|$-q.o. x e $\mu = \rho|\mu|$ (decomposizione polare)
Tale ρ è unica (a meno di q.o.)
(g) Esiste F spazio di Banach separabile, μ a valori in F
con $\mathbb{M}(\mu) < +\infty$ per cui (f) non vale.

Oss Supponiamo che $\mu = \rho|\mu|$ come in (f)
Allora si può definire l'integrazione rispetto a μ come segue:
$\forall f \in L^1(|\mu|)$ pongo $\int_X f \, d\mu := \int_X f\rho \, d|\mu|$
Più in generale, presi F', F'' spazi di Banach, F'' separabile,
$\langle , \rangle$ forma bilineare da $F' \times F$ in F'' t.c. $|\langle y', y \rangle|_{F''} \leq C |y'|_{F'} |y|_F$ $\forall y' \in F'$ $\forall y \in F$
per ogni $f \in L^1(|\mu|, F')$ definisco
$$\int_X \langle f, d\mu \rangle := \int_X \langle f(x), \rho(x) \rangle \, d|\mu|(x)$$
Si può definire l'integrale rispetto a μ anche in mancanza della rappresentazione $\mu = \rho|\mu|$ partendo dalle funzioni semplici come già fatto in precedenza.

DIMOSTRAZIONE

(a) $\forall (A_n) \subset \mathcal{M}$ disgiunta, $A = \bigcup_n A_n$ $\quad |\mu|(A) = \sum_n |\mu|(A_n)$

($\leq$) Preso $\varepsilon>0$, sia $(E_i) \subset \mathcal{M}$ partizione num. di A t.c. $|\mu|(A) - \varepsilon \leq \sum_i |\mu(E_i)|_F$

Allora

$$|\mu|(A) - \varepsilon \leq \sum_i |\mu(E_i)|_F = \sum_i \left|\sum_n \mu(E_i \cap A_n)\right|_F \leq$$
$$\leq \sum_i \sum_n |\mu(E_i \cap A_n)|_F = \sum_n \left(\sum_i |\mu(E_i \cap A_n)|_F\right) \leq \sum_n |\mu|(A_n)$$

poiché $\{E_i \cap A_n\}_i$ è una partizione num. e mis di A_n

($\geq$) Preso $\varepsilon>0$, sia $(E_{n,i}) \subset \mathcal{M}$ partizione num. di A_n t.c.

$|\mu|(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \sum_i |\mu(E_{n,i})|_F$. Allora

$$\left(\sum_n |\mu|(A_n)\right) - \varepsilon = \sum_n \left(|\mu|(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \sum_n \sum_i |\mu(E_{n,i})|_F \leq |\mu|(A)$$

perché $\{E_{n,i}\}_{n,i}$ è una partizione num. e mis. di A.

(b) Sia λ misura positiva t.c. $\lambda(E) \geq |\mu(E)|_F$

$\lambda(E) = \sum_i \lambda(E_i) \geq \sum_i |\mu(E_i)|_F \quad \forall (E_i) \subset \mathcal{M}$ partizione num. di E

$\Longrightarrow \lambda(E) \geq |\mu|(E)$

Inoltre $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|_F$.

(c) $|f\tilde{\mu}| \leq |f|\tilde{\mu}$ perché $|f|\tilde{\mu}$ è una misura positiva t.c. $|f|\tilde{\mu}(E) \geq |\mu(E)|_F$

Infatti $\int_E |f|_F \, d\tilde{\mu} \geq \left|\int_E f \, d\tilde{\mu}\right|_F$

Resta da mostrare che $|f\tilde{\mu}| \geq |f|\tilde{\mu}$

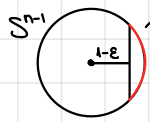
<u>Caso $F = \mathbb{R}^n$</u>

Idea: dato E, trovare partizione di E t.c.

su ogni elemento f è "sostanzialmente costante"

Fisso $\varepsilon>0$, divido S^{n-1} in sottoinsiemi $S_1, \dots, S_N$ Boreliani t.c.

$\forall i \; \exists e_i \in S_i$ t.c. $\langle x, e_i \rangle \geq 1-\varepsilon \quad \forall x \in S_i$



gli S_i sono contenuti in queste calotte

Pongo ora $E_0 := \{x \in E \mid f(x) = 0\}$, $E_i := \{x \in E \mid f(x) \neq 0, \frac{f(x)}{|f(x)|} \in S_i\}$.

Allora

$$|\mu|(E) \geq \sum_{i=0}^N |\mu(E_i)| = \sum_{i=0}^N \left|\int_{E_i} f \, d\tilde{\mu}\right| \geq \sum_{i=1}^N \left(\int_{E_i} f \, d\tilde{\mu}\right) \cdot e_i =$$
$$= \sum_{i=1}^N \int_{E_i} f \cdot e_i \, d\tilde{\mu} \geq \sum_{i=1}^N \int_{E_i} (1-\varepsilon)|f| \, d\tilde{\mu} \geq \left(\int_E |f| \, d\tilde{\mu}\right)(1-\varepsilon)$$

Siccome ε è arbitrario, ottengo $|\mu|(E) \geq \int_E |f| \, d\tilde{\mu} = |f|\tilde{\mu}(E)$.

<u>Caso F qualunque</u>

Sia $S := \{x \in F \mid |x|_F = 1\}$

Fissato $\varepsilon>0$, posso ricoprire S con una famiglia numerabile $\{S_i\}$ di Boreliani disgiunti t.c. $\forall i \; \exists \lambda_i \in F^*$ con $\|\lambda_i\| = 1$ e t.c. $\lambda_i(y) \geq (1-\varepsilon) \; \forall y \in S_i$

Dato $\bar{y} \in S$, esiste $\lambda_{\bar{y}} \in F^*$ t.c. $\|\lambda_{\bar{y}}\| \leq 1$ e $\lambda_{\bar{y}}(\bar{y}) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Pertanto esiste $U_{\bar{y}}$ intorno di $\bar{y}$ t.c. $\lambda_{\bar{y}}(y) \geq 1-\varepsilon \; \forall y \in U_{\bar{y}}$

Per la separabilità di F posso ricoprire S con una famiglia numerabile di $U_{\bar{y}_i}$

Ora procedo come prima

Lemma Se $|\mu|(E)=+\infty$, esiste $\{E_n\}_{n=0,\dots,N}\subset\mathcal{M}$ partizione finita di E t.c. $|\mu|(E_0)=+\infty$ e $\sum_{n=1}^{N}|\mu(E_n)|_F\geq 1$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $m=|\mu(E)|_F$. Esiste $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ partizione di E t.c.
$\sum_{n=0}^{+\infty}|\mu(E_n)|>m+2$. Quindi $\exists N$ t.c. $\sum_{n=0}^{N}|\mu(E_n)|\geq m+2$.
Allora $\{E_0,\dots,E_N, E\setminus\bigcup_{i=0}^{N}E_i\}$ è una partizione finita di E.
Esiste n t.c. $|\mu|(E_n)=+\infty$; posso supporre $n=0$.
Se per assurdo $\sum_{n=1}^{N}|\mu(E_n)|_F<1$, allora
(a) $|\mu(E_0)|_F>m+1$
(b) $|\mu(E)-\mu(E_0)|_F=|\mu(E\setminus E_0)|_F=|\sum_{n=1}^{N}\mu(E_n)|_F\leq\sum_{n=1}^{N}|\mu(E_n)|_F<1$
$\implies |\mu(E_0)|_F<|\mu(E)|+1=m+1$ ↯ □

Lemma Se $|\mu|(X)=+\infty$, esiste $\{E_n\}\subset\mathcal{M}$ partizione numerabile di X t.c. $\sum_n|\mu(E_n)|=+\infty$.

DIMOSTRAZIONE

Poiché $|\mu|(X)=+\infty$, per il Lemma esiste $\{E_n^0\}_{n=0,\dots,N_0}$ partizione finita di X t.c.
$\sum_{n=1}^{N_0}|\mu(E_n^0)|_F\geq 1$ e $|\mu|(E_0^0)=+\infty$.
Allora per il Lemma esiste $\{E_n^1\}_{n=0,\dots,N_1}$ partizione finita di E_0^0 t.c.
$\sum_{n=1}^{N_1}|\mu(E_n^1)|_F\geq 1$ e $|\mu|(E_0^1)=+\infty$.
Itero il ragionamento.
Allora $\{E_n^k\}_{k\in\mathbb{N},n=0,\dots,N_k}$ è una partizione num. di X, e vale
$\sum_{\substack{k=0,1,\dots\\ n=0,\dots,N_k}}|\mu(E_n^k)|_F\geq\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N_k}|\mu(E_n^k)|_F\geq\sum_{k=0}^{\infty}1=+\infty$. □

(d) Se per assurdo $|\mu|(X)=+\infty$, esiste $\{E_n\}\subset\mathcal{M}$ partiz. num. disgiunta di X t.c. $\sum_n|\mu(E_n)|_F=+\infty$
Inoltre $\sum_n\mu(E_n)$ converge incondizionatamente a $\mu(E)$
Poiché F è finito dim, conv. incond. $\implies$ conv. assoluta, cioè $\sum_n|\mu(E_n)|_F<+\infty$ ↯
(e) Siano $X=\mathbb{N}$, $\mathcal{M}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $F=\ell^2$
Sia $\{e_n\}$ la base canonica di ℓ^2
Sia $\mu(E):=\sum_{\substack{n\in E\\ n\neq 0}}\frac{e_n}{n}$ $\quad\forall E\subset\mathbb{N}$, cioè $\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_n}{n}\delta_n$

Si verifica che μ è una misura su $\mathcal{M}$ a valori in ℓ^2, ed è chiaro che
$|\mu|(\mathbb{N})\geq\sum_{n\in\mathbb{N}}|\mu(\{n\})|_{\ell^2}=\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\frac{1}{n}=+\infty$

(f) <u>Caso $F=\mathbb{R}$</u> (esistenza)
Il punto chiave è trovare $A\in\mathcal{M}$ t.c. $\mu\llcorner A$ è positiva e $\mu\llcorner A^c$ è negativa.
Pensando al caso di $\mu=f\tilde{\mu}$ con $\tilde{\mu}$ positiva, è sensato prendere A che massimizza $\mu(E)$ tra tutti gli $E\in\mathcal{M}$.
L'esistenza di A segue dal Lemma
Si verifica infatti che:
- $\mu\llcorner A\geq 0$: se per assurdo $\exists E$ t.c. $\mu\llcorner A(E)<0$, ho che $\mu(A\cap E)<0$, quindi $A\setminus E$ contraddice la massimalità di A
  $\mu(A)=\mu(A\setminus E)+\mu(A\cap E)<\mu(A\setminus E)$

- $\mu L A^c \leq 0$: se per assurdo $\exists E$ t.c. $\mu L A^c(E) > 0$, allora $\mu(E \setminus A) > 0$ quindi $A \cup (E \setminus A)$ contraddice la massimalità di A

ovvero $-\mu L A^c \geq 0$.

Ma allora $|\mu| L A = \mu L A$ e $|\mu| L A^c = -\mu L A^c$, quindi

$$\mu = \mu L A + \mu L A^c = |\mu| L A - |\mu| L A^c = \underbrace{(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A^c})}_{\rho} |\mu|$$

Lemma Sia μ misura a valori reali. Allora esiste $A \in \mathcal{M}$ che massimizza il valore di $\mu(E)$ al variare di $E \in \mathcal{M}$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{F} = \{E \in \mathcal{M} \mid \mu(E) > 0\}$

Se $\mathcal{F} = \emptyset$, allora μ è negativa e prendo $A = \emptyset$.

Se $\mathcal{F} \neq \emptyset$, prendo $\mathcal{G}$ sottofamiglia di $\mathcal{F}$ disgiunta e massimale rispetto all'inclusione (esiste per Zorn)

- $\mathcal{G}$ è numerabile: altrimenti $\exists \varepsilon > 0$ ed infiniti $E_n \in \mathcal{G}$ t.c $\mu(E_n) \geq \varepsilon$, da cui $\mu(\bigcup E_n) = +\infty$ ma μ ha valori reali.
- Prendo $A := \bigcup_{E \in \mathcal{G}} E \in \mathcal{M}$

Se per assurdo esiste $E \in \mathcal{M}$ t.c. $\mu(E) > \mu(A)$, allora $\mu(E \setminus A) > 0$ e $\mathcal{G} \cup \{E \setminus A\}$ contraddice la massimalità di $\mathcal{G}$. $\square$

<u>Caso $F = \mathbb{R}^n$</u>

Per $i = 1, \dots, n$, sia μ_i la componente i-esima di μ.

Allora μ_i è una misura a valori reali e quindi $\mu_i = \rho_i |\mu_i|$.

Prendo $\tilde{\mu} := \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$. Allora $|\mu_i| \ll \tilde{\mu}$ e quindi $|\mu_i| = \sigma_i \tilde{\mu} \Rightarrow \mu_i = \rho_i \sigma_i \tilde{\mu}$.

Quindi $\mu = f \tilde{\mu}$ con $f = (\rho_1 \sigma_1, \dots, \rho_n \sigma_n)$.

Allora $|\mu| = |f| \tilde{\mu}$.

Preso quindi $E := \{x : f(x) \neq 0\}$ e posto $\rho(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$ $\forall x \in E$, ho che

$$\mu = f \tilde{\mu} = \rho |f| \tilde{\mu} = \rho |\mu|$$

<u>Caso F di dimensione finita</u>

Si usa che F è linearmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

- UNICITÀ:

Se $\mu = f|\mu| = \tilde{f}|\mu|$, allora $(f - \tilde{f})|\mu| = 0$.

Allora $0 = \mathbb{M}((f - \tilde{f})|\mu|) = \int_X |f - \tilde{f}| d|\mu|$ e quindi $f = \tilde{f}$ q.o.

- $|\rho| = 1$ q.o.:

se $\mu = \rho|\mu|$, allora $|\mu| = |\rho||\mu| \Rightarrow |\rho| = 1$ $|\mu|$-q.o.

(g) Sia $X = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{Leb}$, $F = L^1([0,1])$ e $\forall E \in \mathcal{M}$ sia $\mu(E) = \mathbb{1}_E$. Allora

- μ è una misura su $\mathcal{M}$ a valori in L^1
- $|\mu| = \mathcal{L}^1$, in particolare è una misura finita.

Infatti $\forall E \in \mathcal{M}$, $\forall \{E_n\}$ partizione mis. e num. di E

$$\sum_n |\mu(E_n)|_{L^1} = \sum_n \mathcal{L}^1(E_n) = \mathcal{L}^1(E) \Rightarrow |\mu| = \mathcal{L}^1$$

• μ non si rappresenta come $\mu = \rho\mathcal{L}^1$ per alcuna $\rho : [0,1] \longrightarrow L^1$

(Traccia) Supponiamo ρ esista.

Definisco allora $\hat\rho : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo $\hat\rho(x,y) := \rho(x)(y)$. Allora

$\int_{E\times F} \hat\rho\, dxdy = \int_F (\int_E \hat\rho(x,y)\,dx)dy = \int_F 1\!\!1_E dy = \mathcal{L}^1(E\cap F)$

Quindi $\int_{E\times F} \hat\rho\, dxdy = 0 \quad \forall E,F$ t.c. $|E\cap F| = 0$

Quindi $\int_{[0,1]^2} \hat\rho\, g\, d\mathcal{L}^2 = 0 \quad \forall g \in \mathrm{Span}\{1\!\!1_{E\times F}$ con $|E\cap F| = 0\} =: \mathcal{F}$

e si dimostra che ogni $g \in L^\infty([0,1]^2, \mathcal{L}^2)$ è limite puntuale q.o. di successioni in $\mathcal{F}$. Ma allora $\hat\rho = 0$ q.o.

(Approccio alternativo: una misura nulla sui generatori della σ-algebra è nulla)

$\square$

Proposizione Siano $(X, \mathcal{M})$ e F Banach.

Sia $M = \{$misure μ su $\mathcal{M}$ a valori in F con $\mathbb{M}(\mu) < +\infty\}$

(a) M è uno spazio vettoriale

(b) $\mathbb{M}$ è una norma su M

(c) $\mathbb{M}$ è completa

Quindi $(M, \mathbb{M})$ è uno spazio di Banach.

DIMOSTRAZIONE

I punti (a) e (b) sono chiari.

Per (c), sia $(\mu_n) \subset M$ t.c. $\sum_{n=0}^\infty \mathbb{M}(\mu_n) < +\infty$

Allora $\mu(E) := \sum_{n=0}^\infty \mu_n(E)$ è ben definita $\forall E \in \mathcal{M}$, è una misura e $\mathbb{M}(\mu) \le \sum_{n=0}^\infty \mathbb{M}(\mu_n)$.

Infine $\mathbb{M}(\sum_{n=0}^N \mu_n - \mu) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Alternativamente, sia $(\mu_n) \subset M$ di Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ t.c. $\mathbb{M}(\mu_n - \mu_m) \le \varepsilon \quad \forall n,m \ge N$

Poiché $|\mu_n(E) - \mu_m(E)|_F \le |\mu_n - \mu_m|(E) \le \mathbb{M}(\mu_n - \mu_m) \le \varepsilon \quad \forall E \in \mathcal{M}$,

$(\mu_n(E))$ è di Cauchy in F $\forall E \in \mathcal{M}$, quindi possiamo definire il limite puntuale $\mu(E) := \lim_{n\to+\infty} \mu_n(E)$. (la convergenza è uniforme)

Si verifica che μ è una misura: innanzitutto μ è additiva, infatti

$$\mu(\bigcup_{i=1}^k E_i) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(\bigcup_{i=1}^k E_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^k \mu_n(E_i) = \sum_{i=1}^k \mu(E_i)$$

Ora, dato $E = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$, fisso $\varepsilon > 0$:

sia N t.c. $\forall n \ge N \quad |\mu(E) - \mu_n(E)|_F \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall E \in \mathcal{M}$

sia K t.c. $\forall k \ge K \quad |\mu_N(E) - \mu_N(\bigcup_{i=1}^k E_i)|_F = |\mu_N(E) - \sum_{i=1}^k \mu_N(E_i)|_F \le \frac{\varepsilon}{3}$.

Allora, dato $k \ge K$, vale

$$|\mu(E) - \mu(\bigcup_{i=1}^k E_i)|_F \le |\mu(E) - \mu_N(E)|_F + |\mu_N(E) - \mu_N(\bigcup_{i=1}^k E_i)|_F + |\mu_N(\bigcup_{i=1}^k E_i) - \mu(\bigcup_{i=1}^k E_i)|_F \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \Longrightarrow \quad \mu(E) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i)$$

Infine si mostra che $\mathbb{M}(\mu_n - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\square$

TEOREMA DI RIESZ-MARKOV-KAKUTANI

X spazio topologico compatto e T_2 (quindi T_4).
μ misura a valori reali su $\mathcal{B}(X)$
$C(X)$ spazio delle funzioni continue su X con la norma del sup $\|\cdot\|_C$
$\forall f \in C(X)$ pongo $T_\mu(f) := \int_X f \, d\mu$ $\quad (= \int_X f\rho \, d|\mu|$ se $\mu = \rho|\mu|)$

Proposizione T_μ è un funzionale lineare e continuo su $C(X)$.
con $\|T_\mu\| := \sup_{\|f\|_C \le 1} |T_\mu(f)| = M(\mu)$.
Inoltre, se μ è positiva, allora T_μ è un funzionale positivo, cioè $T_\mu(f) \ge 0$ se $f(x) \ge 0 \ \forall x \in X$

DIMOSTRAZIONE
$\int f \, d\mu = \int f\rho \, d|\mu|$ è ben definito perché $\int_X |f\rho| \, d|\mu| = \int_X |f| \, d|\mu| \le \|f\|_C |\mu|(X) < +\infty$.
Inoltre $|\int_X f \, d\mu| = |\int f\rho \, d|\mu|| \le \int_X |f\rho| \, d|\mu| \le \int |f| \, d|\mu| \le \|f\|_C |\mu|(X)$
Ne segue che $\|T_\mu\| \le M(\mu)$, quindi T_μ è continuo
Devo mostrare che $\|T_\mu\| \ge M(\mu)$.
Se μ è positiva, considero $f \equiv 1$: $\|T\| \ge T_\mu(f) = \int_X d\mu = M(\mu)$
Se $\mu = \rho|\mu|$ e ρ è continua. $\|T_\mu\| \ge T_\mu(\rho) = \int_X \rho \, d\mu = \int_X \rho^2 \, d|\mu| = M(\mu)$
Cerco $f \in C(X)$ che approssima bene ρ, $\rho = \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E^c} = 2\mathbb{1}_E - 1$ dove $E = \{x \mid \rho(x) = 1\}$
Siccome $|\mu|$ è regolare, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$ aperto, $\exists C$ chiuso t.c. $C \subset E \subset A$ e $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$
Prendo $g : X \longrightarrow [0,1]$ continua t.c. $g = 0$ su A^c, $g = 1$ su C, cioè $\mathbb{1}_C \le g \le \mathbb{1}_A$
(se X è metrico, prendo $g(x) = \dfrac{d(x, A^c)}{d(x,C) + d(x, A^c)}$
Altrimenti X compatto e $T_2 \Rightarrow X$ T_4 e uso il Lemma di Urysohn)
Prendo $f = 2g - 1$, per cui vale $\|f\|_C \le 1$
$\|T\| \ge |T(f)| = \int_X f\rho \, d|\mu| = \int_X \underbrace{(2g-1)\rho}_{h \text{ con } h=1 \text{ su } A^c \cup C} d|\mu| \ge |\mu|(A^c \cup C) - |\mu|(A \setminus C) =$
$= |\mu|(X) - 2\mu(A \setminus C) = M(\mu) - 2\varepsilon$
$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\|T\| \ge M(\mu) - 2\varepsilon$
Il secondo punto è ovvio. $\square$

<u>Oss</u> $T : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzionale lineare e positivo.
Allora (a) T è continuo e $\|T\| \le T(1)$
(b) $f \le g$ su $X \Longrightarrow T(f) \le T(g)$

DIMOSTRAZIONE
(b) è ovvio
(a) segue dal fatto che
$T(f) = T(f^+) - \underset{\overset{\vee}{0}}{T(f^-)} \le T(f^+) \le T(\|f\|_C) = \|f\|_C T(1)$
$\Longrightarrow \|T\| \le T(1)$ $\square$

Teorema di Riesz (1) Sia X spazio topologico compatto.
Sia $T: C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare, continuo e positivo.
Allora esiste ed è unica μ misura positiva e finita su $\mathcal{B}(X)$ t.c. $T = T_\mu$.

DIMOSTRAZIONE

Idea Per definire μ, suppongo che μ esista e mi chiedo come calcolare $\mu(A)$, A aperto, a partire da $T(f)$
$\mathbb{1}_A$ è semicontinua inferiormente
$\Longrightarrow \exists f_n$ continue e positive t.c. $f_n \nearrow \mathbb{1}_A$
Ma allora $T(f_n) = \int f_n \, d\mu \nearrow \int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$ per conv. monotona.
Noto che $\mu(A) = \sup\{T(f) \mid f \in C(X), 0 \le f \le \mathbb{1}_A\}$

$\forall A$ aperto pongo $\mu(A) := \sup\{T(f) \mid f \in C(X), 0 \le f \le \mathbb{1}_A\}$
Bisogna mostrare che μ si estende a una misura esterna su X, che $\mathcal{M}_\mu \supset \mathcal{B}(X)$, che effettivamente $T_\mu = T$ e che μ è unica.

Passo 1 $\mu(A) = \sup\{T(f) \mid f \in C(X), 0 \le f \le \mathbb{1}_A, \operatorname{supp}(f) \subset A\}$
Infatti, $(\ge)$ è chiaro.
Per $(\le)$, prendo $\varepsilon > 0$, prendo $f \in C(X)$ t.c. $0 \le f \le \mathbb{1}_A$ t.c. $\mu(A) - \varepsilon \le T(f)$
Prendo $g := (f - \varepsilon) \vee 0$ ed osservo che
- $0 \le g \le f \le \mathbb{1}_A$
- $\operatorname{supp}(g) \subset \{x : f(x) \ge \varepsilon\} \subset A$
- $T(g) \ge T(f - \varepsilon) = T(f) - \varepsilon T(1) \ge \mu(A) - (1 + T(1))\varepsilon$

Quindi $\sup\{T(f) \mid f \in C(X), 0 \le f \le \mathbb{1}_A, \operatorname{supp}(f) \subset A\} \ge T(g) \ge \mu(A) - (1 + T(1))\varepsilon$.

Passo 2 μ è σ-subadditiva sugli aperti
Sia $A \subset \bigcup_n A_n$ aperti. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $f \in C(X)$, $0 \le f \le 1$, $K = \operatorname{supp}(f) \subset A$ t.c. $T(f) \ge \mu(A) - \varepsilon$

Lemma Se $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, allora $\exists K_n$ compatti t.c. $K \subset \bigcup_{n=0}^{N} K_n$ e $K_n \subset A_n$.

DIMOSTRAZIONE

$\forall n$ sia $\mathcal{F}_n := \{U \text{ aperto}, \overline{U} \subset A_n\}$
Allora $\mathcal{F}_n$ ricopre A_n, cioè $\forall x \in A_n$ $\exists U$ aperto con $\overline{U} \subset A_n$ t.c. $x \in U$.
(Se X metrico, prendo r t.c. $B(x,r) \subset A_n$ e $\overline{U} := B(x, r/2)$)
Allora $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ è un ricoprimento aperto di $\bigcup_n A_n$, quindi di A e quindi di K.
Esiste allora un sottoricoprimento finito $\mathcal{F}' = \bigcup_{n=0}^{N} \mathcal{F}_n'$ con $\mathcal{F}_n' \subset \mathcal{F}_n$.
Prendo $K_n := \bigcup_{U \in \mathcal{F}_n'} \overline{U}$ $\square$

Prendo $f_n \in C(X)$ t.c. $\mathbb{1}_{K_n} \le f_n \le \mathbb{1}_{A_n}$ $(0 \le f_n \le 1, f_n = 0 \text{ su } A^c, f_n = 1 \text{ su } K_n)$
Allora $0 \le f \le \mathbb{1}_K \le \sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{K_n} \le \sum_{n=0}^{N} f_n$
Quindi $\mu(A) - \varepsilon \le T(f) \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ positivo}}}{\le} T\left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right) = \sum_{n=0}^{N} T(f_n) \le \sum_{n=0}^{N} \mu(A_n) \le \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$

Passo 3 μ è monotona: $A \subset A' \implies \mu(A) \le \mu(A')$

Immediato dalla definizione di μ

Passo 4 $\forall E \subset X$ pongo $\mu(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \text{ aperto}, E \subseteq A\}$

Questa def. è compatibile con la def. precedente se E aperto e μ è una misura esterna.

La compatibilità segue dal Passo 3

Il fatto che μ è una misura esterna segue dal fatto che μ coincide con la misura data dalla costruzione di Caratheodory con $\mathcal{F} = \{\text{aperti}\}$, $\rho = \mu$ (per via del Passo 2)

Passo 5 Sia A aperto, $\varepsilon > 0$, esiste K compatto, $K \subset A$ t.c. $\mu(A \setminus K) \le \varepsilon$

Infatti $\exists f \in C(X)$, $0 \le f \le 1$ t.c. $K = \operatorname{supp}(f) \subset A$ e $T(f) \ge \mu(A) - \varepsilon$

$A \setminus K$ aperto: $\forall g \in C(X)$ t.c. $0 \le g \le \mathbb{1}_{A \setminus K}$, $0 \le g + f \le \mathbb{1}_A$ (hanno supporti "disgiunti")

Allora $T(g) + T(f) = T(g+f) \le \mu(A) \implies T(g) \le \mu(A) - T(f) \le \varepsilon \implies \mu(A \setminus K) \le \varepsilon$

Passo 6 Sia K chiuso, allora $K \in \mathcal{M}_\mu$ ($\Rightarrow \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\mu$)

Idea

Fisso $\varepsilon > 0$ e K' chiuso disgiunto da K t.c. $\mu(A := (K \cup K')^c) \le \varepsilon$ (per il Passo 5)

$\forall E \subset X$ $\mu(E \cap K) + \mu(E \cap K^c) \le \mu(E \cap K) + \mu(E \cap A) + \mu(E \cap K') \le$

$\le \mu(E \cap K) + \mu(E \cap K') + \varepsilon$

Prendo A' aperto t.c. $E \subset A'$ e $\mu(A') \le \mu(E) + \varepsilon$

Prendo A'' aperto t.c. $E \cap K \subset A''$

A''' aperto t.c. $E \cap K' \subset A'''$ $\quad A'' \cap A''' = \emptyset$, $A'', A''' \subset A'$

Prendo $f'', f''' \in C(X)$ t.c. $0 \le f'' \le \mathbb{1}_{A''}$, $0 \le f''' \le \mathbb{1}_{A'''}$

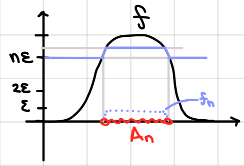
$\mu(A'') \le T(f'') + \varepsilon$, $\mu(A''') \le T(f''') + \varepsilon$ $\qquad 0 \le f'' + f''' \le \mathbb{1}_{A'}$

$\implies \mu(E \cap K) + \mu(E \cap K^c) \le \mu(A'') + \mu(A''') + \varepsilon \le T(f'') + T(f''') + 3\varepsilon =$

$= T(f'' + f''') + 3\varepsilon \le \mu(A') + 3\varepsilon \le \mu(E) + 4\varepsilon$

Passo 7: $\mu(X) = T(1) \implies \mu$ finita

Passo 8: manca mostrare $T(f) = \int_X f \, d\mu$ $\forall f \in C(X)$



Basta mostrarlo per $f \in C(X)$, $f \ge 0$ (perché $\forall f \in C(X)$. $f = f^+ - f^-$)

Fisso $\varepsilon > 0$. $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ pongo $A_n := \{x \in X \mid f(x) > n\varepsilon\}$

$f_n(x) := (f(x) \vee n\varepsilon) \wedge (n+1)\varepsilon - n\varepsilon$

Vale $A_n = \emptyset$, $f_n = 0$ $\forall n \ge \bar{n}$

Allora (1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\bar{n}} f_n(x)$

(2) $\varepsilon \mathbb{1}_{\overline{A_{n+1}}} \le f_n \le \varepsilon \mathbb{1}_{A_n}$ $\forall n$

(3) $g - \varepsilon \le f \le g := \varepsilon \sum_{n=0}^{\bar{n}} \mathbb{1}_{A_n}$

$\int_X f \, d\mu \overset{(3)}{\ge} \int_X g - \varepsilon \, d\mu = -\varepsilon \mu(X) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\bar{n}} \mu(A_n) \overset{(2)}{\ge} -\varepsilon \mu(X) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\bar{n}} T(\tfrac{1}{\varepsilon} f_n) =$

$= -\varepsilon \mu(X) + T(\sum_{n=0}^{\bar{n}} f_n) = -\varepsilon \mu(X) + T(f)$

$\int_X f \, d\mu \overset{(3)}{\le} \int_X g \, d\mu = \varepsilon \sum_{n=0}^{\bar{n}} \mu(A_n) \le \varepsilon \sum_{n=0}^{\bar{n}} \mu(\overline{A_n}) = \varepsilon \mu(X) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\bar{n}} \mu(\overline{A_{n+1}}) \le$

$\le \varepsilon \mu(X) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\bar{n}} T(\tfrac{1}{\varepsilon} f_n) = \varepsilon \mu(X) + \sum_{n=0}^{\bar{n}} T(f_n) = \varepsilon \mu(X) + T(f)$

$\forall C$ chiuso $\mu(C) = \inf\{T(f) \mid f \in C(X), \mathbb{1}_C \le f \le 1\}$

Quindi $T(f) - \varepsilon \mu(X) \le \int_X f \, d\mu \le T(f) + \varepsilon \mu(X)$ $\forall \varepsilon > 0$

$\implies T(f) = \int_X f \, d\mu$

Passo 9: se $T = T_\mu = T_{\tilde{\mu}}$, allora $T_{\mu - \tilde{\mu}} = T_\mu - T_{\tilde{\mu}} = 0$

$\implies |M|(\mu - \tilde{\mu}) = \|T_{\mu - \tilde{\mu}}\| = 0 \implies \mu - \tilde{\mu} = 0 \implies \mu = \tilde{\mu}$ $\square$

Teorema di Riesz (2)

Sia X spazio topologico compatto.
Sia $T: C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo.
Allora esiste ed è unica μ misura reale e finita su $\mathcal{B}(X)$ t.c. $T = T_\mu$.

DIMOSTRAZIONE

UNICITA' come in V1

ESISTENZA segue da $T = T^+ - T^-$, con T^+, T^- funzionali lineari e positivi

l'idea per scrivere T^+ è quella usata per definire μ^+ a partire da μ misura reale.

$\forall f \in C^+(X) := \{f \in C(X) : f \geq 0\}$ definisco

$$T^+(f) := \sup\{T(g) \mid g \in C(X),\ 0 \leq g \leq f\}$$

Passo 0 T^+ è finito poiché T è continuo.

Passo 1 T^+ è superadditivo su C^+ : $f_1, f_2 \in C^+ \Longrightarrow T^+(f_1+f_2) \geq T^+(f_1) + T^+(f_2)$

Preso $\varepsilon > 0$, esistono $g_1, g_2 \in C^+$ t.c. $g_i \leq f_i$ e $T(g_i) \geq T^+(f_i) - \varepsilon$ per $i = 1,2$

Quindi $g_1 + g_2 \in C^+$, $g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$

$\Rightarrow T^+(f_1+f_2) \geq T(g_1+g_2) = T(g_1) + T(g_2) \geq T^+(f_1) + T^+(f_2) - 2\varepsilon$

Passo 2 T^+ è subadditiva su C^+

Preso $\varepsilon > 0$, esiste $g \in C^+$ t.c. $g \leq f_1 + f_2$ e $T^+(f_1+f_2) - \varepsilon \leq T(g)$

Pongo $g_1 := g \wedge f_1$ e $g_2 := g - g_1$.

Si verifica che $g_1, g_2 \in C^+$, $g_1 \leq f_1$, $g_2 \leq f_2$

Allora $T^+(f_1) + T^+(f_2) \geq T(g_1) + T(g_2) = T(g_1+g_2) = T(g) \geq T^+(f_1+f_2) - \varepsilon$

Passo 3 T^+ è positivamente omogeneo su C^+ : $T^+(\lambda f) = \lambda T^+(f) \quad \forall \lambda \geq 0$

Passo 4 T^+ si estende ad un funzionale lineare e positivo su $C(X)$.

segue dal lemma.

Lemma Dato $\Lambda : C^+(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ additivo e positivamente omogeneo, pongo $\forall f \in C(X)$ $\tilde{\Lambda}(f) := \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-)$
Allora $\tilde{\Lambda}$ è lineare.

DIMOSTRAZIONE

Osservo per cominciare che

$\forall f \in C \quad \forall f', f'' \in C^+$ t.c. $f = f' - f''$ vale $\tilde{\Lambda}(f) = \Lambda(f') - \Lambda(f'')$.

Infatti si verifica che $f' \geq f^+$ e $f'' \geq f^-$ e

$$\Lambda(f') - \Lambda(f'') - \tilde{\Lambda}(f) = (\Lambda(f') - \Lambda(f^+)) - (\Lambda(f'') - \Lambda(f^-)) =$$
$$= \Lambda(f' - f^+) - \Lambda(f'' - f^-) = 0 \qquad \text{perché } f' - f^+ = f'' - f^-$$

L'additività di $\tilde{\Lambda}$ è ora una facile conseguenza:

$$\tilde{\Lambda}(f_1+f_2) = \tilde{\Lambda}((f_1^+ + f_2^+) - (f_1^- + f_2^-)) = \Lambda(f_1^+ + f_2^+) - \Lambda(f_1^- + f_2^-) =$$
$$= \Lambda(f_1^+) + \Lambda(f_2^+) - \Lambda(f_1^-) - \Lambda(f_2^-) = \tilde{\Lambda}(f_1) + \tilde{\Lambda}(f_2).$$

Si dimostra poi che $\tilde{\Lambda}$ è 1-omogeneo. $\square$

Passo 5 $T^- := -T + T^+$ è positivo
Per la def. di T^+, $\forall f \in C$ $T^+(f) \geq T(f)$
e quindi $T^-(f) \geq 0$.

Passo 6 Per il Teorema di Riesz (1), esistono misure positive e finite
μ^+ e μ^- su $B(X)$ t.c. $T^+ = T_{\mu^+}$ e $T^- = T_{\mu^-}$
e quindi $T = T_\mu$ con $\mu := \mu^+ - \mu^-$. ◻

corollario L'applicazione $\mu \longmapsto T_\mu$ è un'isometria tra $M(X, \mu, B(X))$ e $C(X)^*$.

EX Sia $\mathcal{F}$ spazio vettoriale di funzioni boreliane limitate su X (compatto)
con la norma del sup, $\mathcal{F} \supsetneq C$
Allora esiste $T: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo
t.c. $T \neq T_\mu$ $\forall \mu \in M(X, \mu, B(X))$
Morale: andare oltre le funzioni continue non è possibile.
Hint Prendo $g \in \mathcal{F} \setminus C$, definisco $T: C \oplus \text{Span}(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ con
$T(f) = 0$ $\forall f \in C$, $T(g) = 1$. Estendo T a $\mathcal{F}$ con Hahn-Banach.

EX Sia $X = [0,1)$, $C_b(X) = \{$funzioni continue e limitate su $X\}$ con la norma del sup.
Allora $\exists T: C_b \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo t.c. $T \neq T_\mu$ $\forall \mu$
Morale la compattezza è necessaria
Hint Sia F il sottospazio di C_b delle funzioni f t.c. esiste $L(f) := \lim_{x \to 1} f$
Sia $T := L$ esteso a C_b con Hahn-Banach.

EX Dimostrare che, dato X compatto, F spazio normato finito dimensionale
$T: C(X) \longrightarrow F$ lineare e continuo, esiste $\mu \in M(X, B(X); F)$
t.c. $T = T_\mu$, cioè $T(f) = \int_X f \, d\mu = \int_X f \rho \, d|\mu|$

EX Mostrare che il risultato non vale in generale se F ha dim. infinita.
Hint $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $F = \ell^2$, $T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n} f(n)$

EX Dimostrare che, dato X compatto, F spazio normato di dim finita
e $T: C(X; F) \longrightarrow \mathbb{R}$ continuo e lineare, esiste $\mu \in M(X, B(X); F^*)$
t.c. $T = T_\mu$, cioè $T(f) = \int_X \langle f(x), \rho(x) \rangle \, d|\mu|(x)$

EX Far vedere che lo stesso vale se $F = \ell^2$,
e in tal caso μ ha massa finita.

Teorema di Riesz (3) Sia X spazio topologico localmente compatto.
Sia $T: C_0(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo,
con $C_0(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0\ \exists K \subset X \text{ compatto t.c. } |f| \leq \varepsilon \text{ su } X \setminus K\}$
Allora esiste unica $\mu \in M(X, \mathcal{B}(X), \mathbb{R})$ t.c. $T = T_\mu$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\hat{X} := X \cup \{\infty\}$ la compattificazione di Alexandrov di X.
$C_0(X) \sim \{f : \hat{X} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue t.c. } f(\infty) = 0\} \subset C(\hat{X})$
Sia $\tilde{T}$ un'estensione continua di T a $C(\hat{X})$ (per Hahn-Banach).
Allora $\exists \tilde{\mu} \in M(\hat{X}, \mathcal{B}(\hat{X}); \mathbb{R})$ t.c. $\tilde{T} = T_{\tilde{\mu}}$
Pongo $\mu := \tilde{\mu} \llcorner X$ $\quad (f(\infty) = 0 \Rightarrow \int_{\hat{X}} f \, d\tilde{\mu} = \int_X f \, d\mu)$ $\square$

<u>Oss</u> Se X è compatto, otteniamo il Teorema precedente.

Teorema di Riesz (4) Sia X spazio topologico localmente compatto.
Sia $T: C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare, continuo e positivo.
Allora esiste ed è unica μ misura positiva su $\mathcal{B}(X)$ localmente finita t.c. $T = T_\mu$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{U} = \{U \text{ aperto t.c. } \bar{U} \text{ è compatto}\}$
Per ogni $U \in \mathcal{U}$ vale $C_0(U) \subset C_c(U)$.
Applico Riesz (3) a $T|_U$ per ogni $U \in \mathcal{U}$: $\exists \mu_U \in M(X, \mathcal{B}(X), \mathbb{R})$ t.c. $T|_U = T_{\mu_U}$.
Allora definisco $\mu := \bigvee_{U \in \mathcal{U}} \mu_U$. Si verifica che $T = T_\mu$. $\square$

Misure prodotto via Riesz

Dati X_1, X_2 spazi localmente compatti, μ_1, μ_2 misure positive finite su $\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2)$ rispettivamente, vogliamo costruire la misura prodotto $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ su $\mathcal{B}(X_1 \times X_2)$ a partire da un funzionale lineare e continuo su $C_0(X_1 \times X_2)$.
Indico con P il sottospazio di $C_0(X_1 \times X_2)$ dato da

$$P := \{ f(x_1,x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \mid f_1 \in C_0(X_1),\ f_2 \in C_0(X_2) \} \quad e \quad \mathcal{X} := \mathrm{Span}(P)$$

Per ogni $f \in \mathcal{X}$, con $f(x_1,x_2) = \sum_i \alpha_i f_{1,i}(x_1) f_{2,i}(x_2)$, definisco

$$T(f) := \sum_i \alpha_i T_1(f_{1,i}) T_2(f_{2,i})$$

dove $T_1(f) := \int_{X_1} f \, d\mu_1$, $T_2(f) := \int_{X_2} f \, d\mu_2$

Si dimostra che

(i) T è ben definito (cioè $T(f)$ non dipende dalla rappresentazione di f come combinazione lineare di elementi di P)

(ii) T è lineare

(iii) T è continuo

La dimostrazione di (ii) e (iii) è immediata. Per (i), bisogna far vedere che se $\sum_i \alpha_i f_{1,i}(x_1) f_{2,i}(x_2) = 0 \ \forall x_1, x_2$ allora $\sum_i \alpha_i T_1(f_{1,i}) T_2(f_{2,i}) = 0$.
In effetti, fissato $x_1 \in X_1$, ho che $\sum_i \alpha_i f_{1,i}(x_1) f_{2,i}(\cdot) = 0$

$$\Rightarrow 0 = T_2\left(\sum_i \alpha_i f_{1,i}(x_1) f_{2,i}(\cdot)\right) = \sum_i \alpha_i f_{1,i}(x_1) \, T_2(f_{2,i})$$

e quindi $\quad 0 = T_1\left(\sum_i \alpha_i f_{1,i}(x_1) \, T_2(f_{2,i})\right) = \sum_i \alpha_i \, T_1(f_{1,i}) \, T_2(f_{2,i})$.

A questo punto T si estende a tutto $C_0(X_1 \times X_2)$ per continuità ($\mathcal{X}$ è denso in C_0, quindi l'estensione è unica, lineare e continua) e per il Teorema di Riesz esiste μ misura positiva su $\mathcal{B}(X_1 \times X_2)$ t.c.

$$T(f) = \int_{X_1 \times X_2} f \, d\mu \qquad \forall f \in C_0(X_1 \times X_2)$$

In particolare, $\forall f_1 \in C_0(X_1)$ $\forall f_2 \in C_0(X_2)$

$$\left(\int_{X_1} f_1 \, d\mu_1\right)\left(\int_{X_2} f_2 \, d\mu_2\right) = T(\underbrace{f_1(x_1) f_2(x_2)}_{f(x_1,x_2)}) = \int_{X_1 \times X_2} f \, d\mu$$

da cui si ottiene per approssimazione che

$$\mu_1(E_1)\mu_2(E_2) = \mu(E_1 \times E_2) \qquad \forall E_1, E_2 \text{ aperti e poi } \forall E_1, E_2 \text{ Boreliani}$$

Similmente si costruisce il prodotto infinito di misure di probabilità di Borel μ_i su spazi compatti X_i, semplicemente ponendo

$$\mathcal{X} := \{ f \in C(\Pi X_i) \mid f \text{ dipende da un numero finito di variabili} \}$$

e per ogni $f = f(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{X}$

$$T(f) = \int_{\prod_{i=1}^{N} X_i} f \, d(\mu_1 \times \dots \times \mu_N)$$

estendendo poi T a tutto $C(X)$.

CONVERGENZA DEBOLE DI MISURE

Ci chiediamo se vale $\delta_{x_n} \xrightarrow[x_n \to \bar{x}]{} \delta_{\bar{x}}$

Questo non vale se considero la convergenza indotta dalla massa,

infatti $\mathbb{M}(\delta_x - \delta_y) = 2 \ \forall x \neq y$

Vogliamo una convergenza più debole rispetto a quella in massa.

DEF. Sia X spazio compatto (o localmente compatto).

Sia (μ_n) misure reali su $\mathcal{B}(X)$.

Dico che $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ nel senso delle misure se

$$\int_X f \, d\mu_n \longrightarrow \int_X f \, d\mu \quad \forall f \in C(X) \quad (\text{o } \forall f \in C_0(X))$$

<u>Oss</u> (1) $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ nel senso delle misure $\iff T_{\mu_n}(f) \longrightarrow T_\mu(f) \ \forall f \in C(X) \ (\forall f \in C_0(X))$

$\iff T_{\mu_n} \longrightarrow T_\mu$ nella topologia debole $*$ del duale di $C(X)$ $(C_0(X))$

Questa convergenza è indotta dalla topologia debole*

del duale di $C(X)$ $(C_0(X))$.

Se $\mathcal{F}$ è una famiglia limitata di misure $(\mathbb{M}(\mu) \leq C < +\infty \ \forall \mu \in \mathcal{F})$

e X è separabile, allora la topologia debole* su $\mathcal{F}$

è metrizzabile

(è importante la separabilità di $C(X)$, che segue dalla separabilità di X)

(vale se X è compatto e metrico)

(2) $\mu_n \xrightarrow{*} \mu \implies \mathbb{M}(\mu_n) \leq C < +\infty$

DIMOSTRAZIONE

$T_{\mu_n}(f)$ converge $\forall f \in C(X) \implies T_{\mu_n}(f)$ limitato $\forall f \in C(X)$

$\xRightarrow[\text{Banach-Steinhaus}]{} \|T_{\mu_n}\| \leq C < +\infty$ cioè $\mathbb{M}(\mu_n) \leq C$ $\square$

(3) Se D è denso in $C(X)$ $(C_0(X))$ e μ_n, μ sono t.c.

$\int_X f \, d\mu_n \longrightarrow \int_X f \, d\mu \ \forall f \in D$ e $\mathbb{M}(\mu_n) \leq C < +\infty$, allora $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$

DIMOSTRAZIONE

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall f \in C(X) \ \exists g \in D : \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$

$$\left| \int_X f \, d\mu_n - \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X (f-g) \, d\mu_n + \int_X g \, d\mu_n - \int_X g \, d\mu + \int_X (g-f) \, d\mu \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \mathbb{M}(\mu_n) + \left| \int_X g \, d\mu_n - \int_X g \, d\mu \right| + \varepsilon \mathbb{M}(\mu)$$

$$\implies \limsup_{n \to +\infty} \left| \int_X f \, d\mu_n - \int_X f \, d\mu \right| \leq \varepsilon (C + \mathbb{M}(\mu))$$

$$\implies \int_X f \, d\mu_n \longrightarrow \int_X f \, d\mu$$ $\square$

(4) La convergenza di μ_n a μ rispetto alla norma $\mathbb{M}$

implica la convergenza debole, ma non vale il viceversa.

esempio (1) $x_n \longrightarrow \bar{x}$ in $X \implies \delta_{x_n} \xrightarrow{*} \delta_{\bar{x}}$

Infatti $\int_X f\, d\delta_{x_n} = f(x_n) \xrightarrow[f \text{ cont.}]{} f(\bar{x}) = \int_X f\, d\delta_{\bar{x}}$

(2) $X = [0,1]$, $\mu_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \delta_{k/n} \xrightarrow{*} \mathcal{L}^1 \llcorner [0,1]$

Infatti $\int_X f\, d\mu_n =$ somma di Riemann di $f \longrightarrow \int_X f(x)dx = \int_X f\, d\mathcal{L}^1$

(3) X localmente compatto, $(x_n) \subset X$, $x_n \longrightarrow +\infty$ (esce definitivamente da ogni compatto $K \subset X$; equiv. non ha punti di accumulazione in X)

Allora $\delta_{x_n} \xrightarrow{*} 0$

DIMOSTRAZIONE

$\forall f \in C_0(X)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K_\varepsilon$ compatto t.c. $|f| \le \varepsilon$ su $X \setminus K_\varepsilon$

$\exists \bar{n}$ t.c. $\forall n \ge \bar{n}$ $x_n \notin K_\varepsilon \implies |\int_X f\, d\delta_{x_n}| = |f(x_n)| \le \varepsilon$ $\square$

(3') X localmente compatto, $C_n = \operatorname{supp} \mu_n$

"$C_n \longrightarrow +\infty$" ($\forall K \subset X$ compatto, $K \cap C_n = \emptyset$ definitivamente in n)

$\|\mu_n\| \le C < +\infty$

Allora $\mu_n \xrightarrow{*} 0$

(4) Se $x_n \longrightarrow \bar{x}$, $x_n \ne \bar{x}$ $\forall n \implies \delta_{x_n} - \delta_{\bar{x}} \xrightarrow{*} 0$

Inoltre per $X = [0,1]$, se $\alpha_n \longrightarrow +\infty$, $\alpha_n << \frac{1}{d(x_n, \bar{x})}$

e $\tilde{\mu}_n := \alpha_n(\delta_{x_n} - \delta_{\bar{x}})$ $\quad$ ($\|\tilde{\mu}_n\| = 2\alpha_n \longrightarrow +\infty$), allora

$\int_X f\, d\tilde{\mu}_n \longrightarrow 0$ $\quad \forall f \in C^1([0,1])$ (denso in $C([0,1])$)

Ad esempio: $X = [0,1]$, $\mu_n := \sqrt{n}\,(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0)$

Allora $\|\mu_n\| = 2\sqrt{n} \longrightarrow +\infty$, quindi μ_n non ha limite in senso debole.

Tuttavia $\int_X f\, d\mu_n \longrightarrow 0$ $\forall f \in C^1([0,1])$. Infatti

$\int_X f\, d\mu_n = \sqrt{n}\,(f(\tfrac{1}{n}) - f(0)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{1/n}$ $\quad \forall f$ continua, anzi Borel

Se $f \in C^1$, $\int_X f\, d\mu_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{1/n}}_{\downarrow\, f'(0)} \longrightarrow 0$

Questo esempio mostra che la convergenza degli integrali per una famiglia densa di funzioni continue non implica necessariamente la convergenza debole delle misure.

Teorema Sia μ_n successione di misure di Borel reali su X, $\|\mu_n\| \le C < +\infty$, con X compatto (localmente compatto) separabile.
Allora $\exists (n_k)$ e $\exists \mu$ t.c. $\mu_{n_k} \xrightarrow{*} \mu$.

Oss Questo risultato è una conseguenza del Teorema di Banach-Alaoglu applicato al duale di $C(X)$ e della separabilità di $C(X)$.

Lemma 1 Sia X spazio metrico, Y spazio metrico completo, (f_n) successione di funzioni continue da X in Y t.c.
(i) le f_n sono equicontinue;
(ii) $f_n(x)$ converge per $n \to +\infty$ $\forall x \in D$ denso in X.
Allora f_n converge puntualmente a $f: X \to Y$ continua.

DIMOSTRAZIONE

Per (i), $\forall \varepsilon > 0$ $\forall \bar{x} \in X$ $\exists \delta = \delta(\bar{x}, \varepsilon) > 0$ t.c. $\forall x \in X$ $\forall n$ $d_X(x, \bar{x}) \le \delta \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(\bar{x})) \le \varepsilon$

Fisso $\varepsilon > 0$ e prendo $x \in D$ t.c. $d_X(x, \bar{x}) \le \delta(\bar{x}, \varepsilon)$

Siccome $f_n(x)$ converge, $\exists \bar{n}$ t.c. $\forall n, n' \ge \bar{n}$ $d_Y(f_n(x), f_{n'}(x)) \le \varepsilon$

Ma allora

$$d_Y(f_n(\bar{x}), f_{n'}(\bar{x})) \le d_Y(f_n(\bar{x}), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_{n'}(x)) + d_Y(f_{n'}(x), f_{n'}(\bar{x})) \le 3\varepsilon$$

Allora $(f_n(\bar{x}))$ è di Cauchy in Y. Siccome Y è completo, esiste

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(\bar{x}) =: f(\bar{x})$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ ottengo

$$d_X(x, \bar{x}) \le \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\bar{x})) \le \varepsilon$$

e dunque f è continua. $\square$

Lemma 2 Sia X spazio metrico compatto (ovvero X spazio topologico compatto e I num. oppure separabile).
Allora $C(X)$ è separabile.

DIMOSTRAZIONE

Fisso $\delta > 0$. Per compattezza, posso ricoprire X con una famiglia finita di palle aperte $\{B_i := B(x_i, \delta)\}_{i \in I_\delta}$.

$\forall i \in I_\delta$ sia $\quad p_i(x) := \dfrac{\mathrm{dist}(x, B_i^c)}{\sum_{j \in I_\delta} \mathrm{dist}(x, B_j^c)}$

allora
- $p_i : X \to [0,1]$ è continua
- $\mathrm{supp}(p_i) \subset \overline{B_i}$
- $\sum p_i(x) = 1 \quad \forall x \in X$

$\{p_i\}$ è una partizione dell'unità continua subordinata al ricoprimento $\{B_i\}$

Pongo $\mathcal{F}_\delta := \left\{ \sum_{i \in I_\delta} \alpha_i p_i(x) \mid \alpha_i \in \mathbb{Q} \right\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \{p_i\}$ (numerabile)

e $\mathcal{F} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\frac{1}{n}}$ (numerabile)

Dimostro che $\mathcal{F}$ è denso in $C(X)$.

Data infatti $f \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$, essendo f unif. continua, esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\forall x, x' \in X \quad d(x, x') \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \le \varepsilon$$

Per ogni $i \in I_\delta$ prendo $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ t.c. $|\alpha_i - f(x_i)| \le \varepsilon$

e pongo $g := \sum_{i \in I_\delta} \alpha_i p_i(x)$

Dato ora $x \in X$, $p_i(x) > 0 \Rightarrow d(x_i, x) \le \delta \Rightarrow |f(x_i) - f(x)| \le \varepsilon$

$$\Rightarrow |g(x) - f(x)| = \left|\sum \alpha_i p_i(x) - \sum p_i(x) f(x)\right| \le \sum p_i(x) |\alpha_i - f(x)| \le$$

$$\le \sum p_i(x) \left[|\alpha_i - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \right] \le \sum p_i(x) (2\varepsilon) = 2\varepsilon$$

Quindi ho trovato $g \in \mathcal{F}_\delta$ t.c. $\|f - g\|_{C(X)} \le 2\varepsilon$. $\square$

Lemma 2': Sia X spazio localmente compatto e separabile. Allora $C_0(X)$ è separabile.

DIMOSTRAZIONE (TEO)

$\forall n$ sia $T_n \in (C(X))^*$ [risp. $(C_0(X))^*$] dato da

$$T_n(f) := \int_X f \, d\mu_n$$

Per il Teorema di Riesz, basta dimostrare che esiste (n_k) t.c. $T_{n_k} \xrightarrow{*} T$.

Osservo che $\forall f$ $|T_n(f)| \leq \|M(\mu_n)\| \|f\|_{C(X)} \leq C\|f\|_{C(X)}$ e quindi $(T_n(f))$ è una successione limitata, ed esiste quindi (n_k) dipendente da f t.c. $T_{n_k}(f)$ converge per $k \to +\infty$.

Preso D denso in $C(X)$ [risp. $C_0(X)$] e numerabile (per il lemma 2/2'), posso trovare per procedimento diagonale (n_k) t.c.

$T_{n_k}(f)$ converge per $k \to +\infty$ $\forall f \in D$.

Ma allora per il lemma 2 (con $X = C_0(X)$ [risp. $C_0(X)$] e $Y = \mathbb{R}$)

$$T_{n_k}(f) \longrightarrow T(f) \quad \forall f \in C(X) \text{ [risp. } C_0(X)]$$

e T è continuo e lineare (perché il limite di funzionali lineari è lineare). $\square$

EX Sia X spazio metrico compatto.

Sia $(x_n) \subset X$, $x_n \longrightarrow \bar{x}$ e $x_n \neq \bar{x}$ $\forall n$

e sia α_n t.c. $\alpha_n \cdot d(x_n, \bar{x}) \longrightarrow 0$

Sia infine $\mu_n := \alpha_n (\delta_{x_n} - \delta_{\bar{x}})$

Dimostrare che

(a) $\int_X f \, d\mu_n \longrightarrow 0 \quad \forall f : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz

(b) $\mu_n \xrightarrow{*} 0$ sse α_n limitata

Def. X spazio topologico, $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice
- semicontinua inferiormente (sci) se
  $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}\ f^{-1}((a,+\infty])$ è aperto $\Longleftrightarrow \forall a \in \overline{\mathbb{R}}\ f^{-1}([-\infty,a])$ è chiuso
- semicontinua superiormente (scs) se
  $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}\ f^{-1}([-\infty,a))$ è aperto $\Longleftrightarrow \forall a \in \overline{\mathbb{R}}\ f^{-1}([a,+\infty])$ è chiuso $\Longleftrightarrow -f$ sci

Oss Detta τ la topologia su $\overline{\mathbb{R}}$ data dalle semirette aperte $(a,+\infty]$, con $a \in \overline{\mathbb{R}}$, allora f è sci se e solo se f è continua da X in $(\overline{\mathbb{R}},\tau)$

NOTA Definizione puntuale di sci e liminf
Data $f: X' \subset X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in X'$, definisco

$$\liminf_{x \to \bar{x}} f(x) := \sup_{U \text{ int. di } \bar{x}} \Big(\inf_{\substack{x \in U \\ x \neq \bar{x}}} f(x) \Big)$$

(con la convenzione $\inf \emptyset = +\infty$), e dico che f è sci in $\bar{x} \in X'$ se

$$\liminf_{x \to \bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x})$$

(cioè se $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a < f(\bar{x})$ esiste U int. di $\bar{x}$ t.c. $f > a$ su U).
Si vede allora che f è sci su X sse f è sci in $\bar{x}$ per ogni $\bar{x} \in X$.
Analogo per scs:

$$\limsup_{x \to \bar{x}} f(x) := \inf_{U \text{ int. di } \bar{x}} \Big(\sup_{\substack{x \in U \\ x \neq \bar{x}}} f(x) \Big)$$

Proposizione Sia X spazio topologico, $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset X$. Allora:
(a) $A \subset X$ aperto $\Longleftrightarrow \mathbb{1}_A$ sci
(b) f sci $\Longrightarrow \forall \bar{x} \in X\ \forall x_n \longrightarrow \bar{x}\ \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(\bar{x})$
(c) se X è I numerabile, allora $\liminf_{x \to \bar{x}} f(x) = \inf_{\substack{x_n \to \bar{x} \\ x_n \neq \bar{x}}} \big(\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \big)$

(d) X compatto, f sci $\Longrightarrow f$ ammette minimo
(e) Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sci.
Allora $\bar{f} := \bigvee \mathcal{F}$ $\big(\bar{f}(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)\big)$ è sci
(f) Sia X spazio topologico T_4.
Sia $G_f := \{ g: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ continue}, g \leq f \}$
f sci $\Longleftrightarrow f = \bigvee G_f$
(g) Sia X metrico, $f \not\equiv +\infty$, $f \geq m > -\infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$ sia
$f_\varepsilon(x) := \inf \{ f(y) + \frac{1}{\varepsilon} d(x,y) \mid y \in X \}$ (inf-convol. di f)
allora f_ε è $\frac{1}{\varepsilon}$-Lipschitziana; inoltre
f è sci $\Longleftrightarrow f_\varepsilon \uparrow f$ puntualmente.

DIMOSTRAZIONE
(a), (b), (c) immediati
(d) Sia $m := \inf f(x)$ e $\forall t \in \overline{\mathbb{R}}$ sia $C_t := f^{-1}([-\infty,t])$. Allora
f sci $\Longrightarrow C_t$ chiuso $\forall t$, quindi compatto; $t > m \Longrightarrow C_t \neq \emptyset$
ma allora $\bigcap_{t > m} C_t \neq \emptyset$.
Infine $\bigcap_{t>m} C_t := \{ x \mid f(x) \leq t\ \forall t > m \} = \{ x \mid f(x) \leq m \} = \{ x \mid f(x) = m \}$

(e) Verifica immediata dalla definizione e dal fatto che $\bar{f}^{-1}((a,+\infty]) = \bigcap_{f\in\mathcal{G}} f^{-1}((a,+\infty])$

(f) ($\Leftarrow$) segue da (e)

($\Rightarrow$) Prendo $\bar{x}\in X$, $m<f(\bar{x})$. Allora f sci $\Rightarrow \exists U$ aperto, $\bar{x}\in U$ t.c. $f(x)\geq m$ su U. Siccome $\bar{x}\notin U^c$ e U^c è chiuso, e X è T_4, esiste $\varphi : X \longrightarrow [0,1]$ continua t.c. $\varphi=0$ su U^c, $\varphi(\bar{x})=1$.

Usando φ, costruisco $g: X \longrightarrow [-\infty, m]$ t.c. $g\equiv-\infty$ su U^c e $g(\bar{x})=m$

Dunque $g\in\mathcal{G}_f$ e quindi $\bigvee\mathcal{G}_f(\bar{x})\geq m$

Siccome $m<f(\bar{x})$ è arbitrario, $\bigvee\mathcal{G}_f(\bar{x})\geq f(\bar{x})$

mentre per definizione so che $\bigvee\mathcal{G}_f\leq f$

(g) $f\not\equiv+\infty$, $f\geq m>-\infty \Longrightarrow f_\varepsilon$ finita

Fissati $x,x'\in X$, $\delta>0$ $\exists y$ t.c. $f_\varepsilon(x)\geq f(y)+\frac{1}{\varepsilon}d(x,y)-\delta$

$\Longrightarrow f_\varepsilon(x')-f_\varepsilon(x)\leq[f(y)+\frac{1}{\varepsilon}d(x',y)]-[f(y)+\frac{1}{\varepsilon}d(x,y)-\delta]\leq\frac{1}{\varepsilon}(d(x',y)-d(y,x))+\delta\leq\frac{1}{\varepsilon}d(x',x)+\delta$

Siccome δ è arbitrario, $f_\varepsilon(x')-f_\varepsilon(x)\leq\frac{1}{\varepsilon}d(x',x)$

Analogamente $f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x')\leq\frac{1}{\varepsilon}d(x,x')$ e quindi f_ε è $\frac{1}{\varepsilon}$-Lipschitziana.

Infine $f_\varepsilon(x)\uparrow$ per $\varepsilon\downarrow 0$ per la definizione e inoltre $f_\varepsilon(x)\leq f(x)$ $\forall\varepsilon$

Resta da vedere che $f_\varepsilon(x)\uparrow f(x)$, ovvero $\forall\delta>0$ $f_\varepsilon(x)\geq f(x)-\delta$ per ε suff. piccolo.

Sia dunque r t.c. $f(y)\geq f(x)-\delta$ $\forall y$ t.c. $d(y,x)\leq r$. Allora

$f_\varepsilon(x)\geq(f(x)-\delta)\wedge(m+\frac{r}{\varepsilon})\geq f(x)-\delta$ se $\varepsilon\leq\frac{r}{f(x)-\delta-m}$

<u>Oss</u>
- f si dice sequenzialmente sci se $\forall\bar{x}\in X$ $\forall(x_n)$ t.c. $x_n\longrightarrow\bar{x}$ vale $f(\bar{x})\leq\liminf_{n\to+\infty} f(x_n)$

  (b) dice che f sci $\Longrightarrow f$ seq. sci

  (anzi f sci in $\bar{x}\Longrightarrow f$ seq. sci in $\bar{x}$)
- l'enunciato (d) vale anche se f è solo seq. sci e/o X è seq. compatto.

Def. Data $f:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ definisco l'inviluppo sci $f_*:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ come

$f_*:=\bigvee\{g:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}} \mid g \text{ sci}, g\leq f\}$

Definisco l'inviluppo scs $f^*:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ come

$f^*:=\bigwedge\{g:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}} \mid g \text{ scs}, g\geq f\}$

> **Proposizione**
> (a) f_* è sci
> (b) f^* è scs
> (c) $f_*\leq f\leq f^*$
> (d) f è continua in $\bar{x}\Longleftrightarrow f_*(\bar{x})=f(\bar{x})=f^*(\bar{x})$.

DIMOSTRAZIONE

(a) segue dal punto (e) della Prop. precedente

(b) segue dall'analogo del punto (e) della Prop. per funzioni scs.

(c) ovvio

(d) ($\Longrightarrow$) segue dal punto (f)

($\Longleftarrow$) segue dalla def. di funzione sci/scs con gli intorni. $\square$

Proposizione 1 Sia X compatto, μ_n, μ misure finite su $\mathcal{B}(X)$ t.c. $\mu_n \geq 0$, $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$. Allora:

(a) $\mu \geq 0$

(b) $\mathbb{M}(\mu_n) = \mu_n(X) \longrightarrow \mu(X) = \mathbb{M}(\mu)$

(c) $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ sci $\Longrightarrow$ f limitata inferiormente e Boreliana $\Longrightarrow \int_X f \, d\mu_n \in (-\infty, +\infty]$ è ben definito e $\liminf_{n \to +\infty} \int_X f \, d\mu_n \geq \int_X f \, d\mu$

(c') Se A è aperto, $\liminf_{n \to +\infty} \mu_n(A) \geq \mu(A)$
(la disuguaglianza può essere stretta; il limite può non esistere)

(d) $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ scs $\Longrightarrow$ f limitata superiormente e Boreliana $\Longrightarrow \int_X f \, d\mu_n \in [-\infty, +\infty)$ è ben definito e $\limsup_{n \to +\infty} \int_X f \, d\mu_n \leq \int_X f \, d\mu$

(d') Se C è chiuso, $\limsup_{n \to +\infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$

(e) Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata Boreliana e $\mu(D(f)) = 0$ ($D(f) = \{$p.ti di discontinuità di $f\}$) allora $\int_X f \, d\mu_n \longrightarrow \int_X f \, d\mu$

(e') Se $E \in \mathcal{B}(X)$ e $\mu(\partial E) = 0$, allora $\mu_n(E) \longrightarrow \mu(E)$

DIMOSTRAZIONE

(a) $\mu_n \geq 0 \Longrightarrow T_{\mu_n}$ positivo $\Longrightarrow T_\mu$ positivo $\overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow} \mu \geq 0$

(b) $\mu_n(X) = \int_X 1 \, d\mu_n \longrightarrow \int_X 1 \, d\mu = \mu(X)$

(c) f è limitata inferiormente perché ammette minimo $\Longrightarrow f^-$ limitata $\Longrightarrow \int_X f^- \, d\mu < +\infty \Longrightarrow \int_X f \, d\mu \in (-\infty, +\infty]$ è ben definito
f è Boreliana perché $f^{-1}((a, +\infty])$ è aperto e quindi Borel $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$, e le semirette $(a, +\infty]$ con $a \in \overline{\mathbb{R}}$ generano $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Lemma Data $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ sci, $\forall m < \int_X f \, d\mu$ $\exists g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua t.c. $g \leq f$ e $\int_X g \, d\mu \geq m$.

DIMOSTRAZIONE

<u>Caso X metrico</u>

Siccome f è limitata inferiormente, esiste una successione $g_n \in C(X)$ t.c. $g_n \uparrow f$ puntualmente.
Pertanto $\int_X g_n \, d\mu \uparrow \int_X f \, d\mu$ per il Teo. di conv. monotona (applicato a $g_n - g_0 \uparrow f - g_0$).
In particolare, dato $m < \int_X f \, d\mu$, esiste n t.c. $\int_X g_n \, d\mu \geq m$.

<u>Caso X qualunque</u> Posso supporre $f \geq 0$.

Dato $\varepsilon > 0$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ pongo $A_n := \{x : f(x) > n\varepsilon\}$
Allora A_n è aperto $\forall n$ e $\tilde{f}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 1\!\!1_{A_n}(x) \leq f(x) \leq \tilde{f}(x) + \varepsilon$
In particolare $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \mu(A_n) \geq \int_X f \, d\mu(x) - \varepsilon \mu(X)$
Inoltre $\forall n \; \exists g_n \in C(X)$ con $0 \leq g_n \leq 1\!\!1_{A_n}$ t.c. $\int_X g_n \, d\mu \geq \mu(A_n) - \frac{1}{2^n}$
(perché $\forall A$ aperto $\mu(A) = \sup_{g \in C(X), 0 \leq g \leq 1\!\!1_A} \int_X g \, d\mu, \dots$)

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon g_n \leq \tilde{f} \leq f$ e $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon g_n \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu - \varepsilon(1 + \mu(X))$
Infine $\forall m' < \int_X f \, d\mu - \varepsilon(1 + \mu(X))$, esiste N finito t.c. $\int_X \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \varepsilon g_n}_{g} \, d\mu \geq m'$ e $g \leq \tilde{f} \leq f$
Siccome m' e ε sono arbitrari, posso fare in modo che $m' \geq m$ nella tesi.

□

Allora $\liminf_{n\to+\infty} \int_X f\,d\mu_n \overset{g\le f}{\geq} \liminf_{n\to+\infty} \int_X g\,d\mu_n \overset{g\in C(X)}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_X g\,d\mu_n = \int_X g\,d\mu \geq m$
e concludo per arbitrarietà di m.

(d) segue da (c) applicato a $-f$

(e) Prendo f^* e f_* inviluppi scs e sci di f.
Siccome $f_* \le f \le f^*$ e $f_* < f^*$ solo su $D(f)$ e $\mu(D(f))=0$, ho che $f_* = f = f^*$ μ-q.o. Ma allora

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_X f\,d\mu_n \geq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_*\,d\mu_n \overset{(c)}{\geq} \int_X f_*\,d\mu = \int_X f\,d\mu =$$
$$= \int_X f^*\,d\mu \overset{(d)}{\geq} \limsup_{n\to+\infty} \int_X f^*\,d\mu_n \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_X f\,d\mu_n$$

quindi tutte le disuguaglianze sono uguaglianze, ovvero
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f\,d\mu_n = \int_X f\,d\mu.$$

$\square$

<u>OSS</u> Esistono molti insiemi t.c. $\mu(\partial E)=0$.
Per esempio, sia X metrico, C chiuso in X, μ σ-finita
$\forall t>0$ sia $C_t := \{x \mid \mathrm{dist}(x,C) \le t\}$ è chiuso
$A_t := \{x \mid \mathrm{dist}(x,C) < t\}$ è aperto
$E_t := \{x \mid \mathrm{dist}(x,C) = t\}$
Allora $E_t \supset \partial C_t, \partial A_t$, per ogni t tranne una quantità numerabile
$$\mu(E_t) = \mu(\partial A_t) = \mu(\partial C_t) = 0$$
Analogamente, data $f: X \to \mathbb{R}$ continua e posto $\forall t \in \mathbb{R}$
$C_t := f^{-1}([t,+\infty))$, $A_t := f^{-1}((t,+\infty))$, allora $\partial C_t, \partial A_t \subset f^{-1}(t)$
$\Rightarrow$ per ogni t tranne una quantità numerabile $\mu(\partial C_t) = \mu(\partial A_t) = \mu(f^{-1}(t)) = 0$

<u>EX</u> Dimostrazione alternativa che, per $X=[0,1]$,
posto $\mu_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \delta_{\frac{k}{n}}$, allora $\mu_n \xrightarrow{*} \mathcal{L}^1 \llcorner [0,1]$
Siccome $M(\mu_n) \le 1$, posso supporre a meno di ssc che $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$.
Preso $N = \{$atomi di $\mu\} = \{x : \mu(\{x\}) = 0\}$, ho che $\forall a,b \in [0,1] \setminus N$
$\mu(\partial[a,b]) = 0 \Longrightarrow \mu_n([a,b]), \mu_n((a,b)) \longrightarrow \mu((a,b)) = \mu([a,b])$.
Si vede inoltre che $\mu_n([a,b]) \sim \mu_n((a,b)) \sim b-a$
($[a,b]$ contiene circa $(b-a)n$ punti della forma $\frac{k}{n}$)
Quindi $\mu([a,b]) = \mathcal{L}^1([a,b]) = b-a$ per "quasi tutti" gli a,b,
e quindi anche per tutti gli a,b. Ma allora $\mu = \mathcal{L}^1 \llcorner [0,1]$

<u>EX</u> Sia μ misura finita e positiva su $\mathcal{B}([0,1])$. Allora esistono μ_n combinazioni lineari di delte t.c. $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$.
<u>Hint</u> Per ogni $P = (0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1)$ partizione di $[0,1]$, pongo
$$\mu_P := \sum_{i=1}^{N} \mu([x_{i-1}, x_i]) \cdot \delta_{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}}$$
Si verifica che, presa una successione di partizioni (P_n) t.c.
$\delta(P_n) \longrightarrow 0$ e $\mu(P_n) = 0$ $\forall n$, allora $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$

<u>esempio</u> (c') $X := [-1,1]$, $A := [-1,0)$, $\mu_n := \delta_{-\frac{1}{n}} + \delta_{(-1)^n \frac{1}{n}}$
Allora $\mu_n \xrightarrow{*} \mu = 2\delta_0$, $\mu(A) = 0$, $\mu_n(A) = \begin{cases} 2 & \text{per } n \text{ dispari} \\ 1 & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$

(d') $X := [-1,1]$, $C := [0,1]$ $\quad \mu_n := \delta_{-\frac{1}{n}} + \delta_{(-1)^n \frac{1}{n}}$
Allora $\mu_n \xrightarrow{*} \mu = 2\delta_0$, $\mu(C) = 2$, $\mu_n(C) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ dispari} \\ 1 & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$

(e') $X := [-1,1]$, $E := [-1,0]$ $\mu_n := \delta_{\frac{1}{n}}$
Allora $\mu_n \xrightarrow{*} \mu = \delta_0$, $\mu(\partial E) = \mu(\{-1,0\}) = 1$, ma $\mu_n(E) = 0$, $\mu(E) = 1$

proposizione 2 Sia X localmente compatto, (μ_n) misure positive su $\mathcal{B}(X)$ con $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$. Allora:

(a) $\mu \geq 0$

(b) $\mu(X) \leq \liminf \mu_n(X)$, cioè $M(\mu) \leq \liminf M(\mu_n)$

(c) $f: X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ s.c.i. t.c. $\liminf_{x \to +\infty} f(x) \geq 0$

(cioè $\forall \varepsilon > 0\ \exists K$ compatto t.c. $f(x) \geq -\varepsilon\ \forall x \in X \setminus K$)

allora $\liminf_{n \to +\infty} \int_X f \, d\mu_n \geq \int_X f \, d\mu$

(c') Se A è aperto, $\liminf_{n \to +\infty} \mu_n(A) \geq \mu(A)$

(d) $f: X \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ s.c.s. t.c. $\limsup_{x \to +\infty} f(x) \leq 0$

allora $\limsup_{n \to +\infty} \int_X f \, d\mu_n \leq \int_X f \, d\mu$

(d') Se C è compatto, $\limsup_{n \to +\infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$

(e) Se $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata Boreliana

e $\mu(D(f)) = 0$ ($D(f) = \{$p.ti di discontinuità di $f\}$)

e $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$, allora $\int_X f \, d\mu_n \longrightarrow \int_X f \, d\mu$

(e') Se $E \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(\partial E) = 0$ e E relativamente compatto,

allora $\mu_n(E) \longrightarrow \mu(E)$

esempio (b) $X = \mathbb{R}$, $\mu_n = \delta_n$: $\delta_n \xrightarrow{*} 0$ e $M(\mu_n) \equiv 1$, $M(\mu) = 0$.

(c) $X = \mathbb{R}$, $\mu_n = \delta_n$, $f \equiv -1$

(d) $X = \mathbb{R}$, $\mu_n = \delta_n$, $f \equiv 1$

(d') $X = \mathbb{R}$, $\mu_n = \delta_n$, $C = \mathbb{R}$

(e) $X = \mathbb{R}$, $\mu_n = \delta_n$, $f \equiv c$

(e') $X = \mathbb{R}$, $\mu_n = \delta_n$, $E = X = \mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE

Idea: applico la Prop. 1 a $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ (compattificazione di Alexandrov)

$\tilde{\mu}_n :=$ estensione di μ_n a $\hat{X}$ (banale: $\tilde{\mu}_n(E) := \mu_n(E \setminus \{\infty\})\ \forall E \in \mathcal{B}(\hat{X})$)

Poiché le μ_n sono equilimitate in massa, a meno di sottosuccessione posso supporre che $\exists \lim_{n \to +\infty} \mu_n(X) =: L$

(Basta dimostrare gli enunciati per tale sottosuccessione)

Si verifica allora che $\tilde{\mu}_n \xrightarrow{*} \tilde{\mu}$ su $\hat{X}$, dove $\tilde{\mu} := \underbrace{\mu}_{\text{estensione banale di } \mu \text{ a } \hat{X}} + \alpha \delta_\infty$

con $\alpha := L - \mu(X)$ ("perdita di massa")

Infatti la convergenza $\int_{\hat{X}} g \, d\tilde{\mu}_n \longrightarrow \int_{\hat{X}} g \, d\tilde{\mu}$ vale per

- $g: \hat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua t.c. $g(\infty) = 0$, perché la restrizione di g a X è una funzione in $C_0(X)$ e quindi per ipotesi
  $$\int_{\hat{X}} g \, d\tilde{\mu}_n = \int_X g \, d\mu_n \longrightarrow \int_X g \, d\mu = \int_{\hat{X}} g \, d\tilde{\mu}$$
- $g: \hat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \equiv c$ costante perché
  $$\int_{\hat{X}} g \, d\tilde{\mu}_n = c\mu_n(X) \longrightarrow cL = c(\mu(X) + \alpha) = c\tilde{\mu}(\hat{X}) = \int_{\hat{X}} g \, d\tilde{\mu}$$
- $g: \hat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, perché g si scrive come $g = \tilde{g} + g(\infty)$, con $\tilde{g}(x) := g(x) - g(\infty)$ funzione continua e nulla in ∞, quindi basta applicare i due punti precedenti.

(a) Dalla Prop. 1(a) segue $\hat{\mu} \geq 0$, quindi in particolare $\mu \geq 0$ e $\alpha \geq 0$

(b) Dalla Prop. 1(b) segue che $\hat{\mu}_n(\hat{X}) \longrightarrow \hat{\mu}(\hat{X})$, cioè
$\mu_n(X) \longrightarrow \mu(X) + \alpha$, da cui $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(X) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(X) \geq \mu(X)$

(c) Presa $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ sci, la estendo a
$\tilde{f} : \hat{X} \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ sci ponendo $\tilde{f}(\infty) = \liminf_{x\to\infty} f(x)$
$\liminf_{n\to+\infty} \int_X f d\mu_n = \liminf_{n\to+\infty} \int_{\hat{X}} \tilde{f} d\hat{\mu}_n \geq \int_{\hat{X}} \tilde{f} d\hat{\mu} = \int_X f d\mu + \alpha \tilde{f}(\infty) \geq \int_X f d\mu$

(c') segue applicando (c) a $f := 1\!\!1_A$, infatti $\liminf_{x\to\infty} f = \liminf_{x\to\infty} 1\!\!1_A = \{^0_1$.

(d) segue applicando (c) a $-f$.

(d') segue applicando (d) a $f := 1\!\!1_C$ (C chiuso implica f scs;
C compatto implica $\limsup_{x\to\infty} 1\!\!1_C = 0$).

(e) Data $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ come per ipotesi, considero l'estensione $\tilde{f}$ a $\hat{X}$
data da $\tilde{f}(\infty) := 0$
Allora $\tilde{f}$ è Boreliana, limitata e $D(\tilde{f}) = D(f)$
(perché $\tilde{f}$ è continua in ∞). Applicando la Prop. 1(e), ottengo
$\lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\hat{X}} \tilde{f} d\hat{\mu}_n = \int_{\hat{X}} \tilde{f} d\hat{\mu} = \int_X f d\mu + \alpha \tilde{f}(\infty) = \int_X f d\mu$

(e') segue applicando (e) a $f = 1\!\!1_E$. $\square$

<u>Oss</u> Se all'ipotesi $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ aggiungiamo l'ipotesi
$\mu_n(X) \longrightarrow \mu(X)$ (convergenza in massa)
allora la Prop. 1 vale senza modifiche
La dimostrazione è quella della Prop 2, osservando che in questo caso $\alpha = 0$,
ovvero $\hat{\mu}$ coincide con l'estensione "banale" di μ a $\hat{X}$.

Consideriamo ora il caso X compatto, μ_n a valori vettoriali in F,
spazio normato di dimensione finita (il caso più rilevante è $F = \mathbb{R}$).
Di nuovo, dico $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ se $\int_X f d\mu_n \longrightarrow \int_X f d\mu \quad \forall f \in C(X)$
(o, equivalentemente, se $\int_X \langle f, d\mu_n \rangle \longrightarrow \int_X \langle f, d\mu \rangle \quad \forall f \in C(X; F^*)$)

Proposizione 3 Supponiamo che $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ e $|\mu_n| \xrightarrow{*} \lambda$.
Allora $\lambda \geq |\mu|$ e vale $\lambda = |\mu|$ sse $\mu_n \longrightarrow \mu$ in massa.

DIMOSTRAZIONE (per $F = \mathbb{R}$)
Scrivo $\mu_n = \mu_n^+ - \mu_n^-$
Posso supporre (a meno di ssc) che $\mu_n^+ \xrightarrow{*} \lambda^+$, $\mu_n^- \xrightarrow{*} \lambda^-$
Ma allora $\mu_n \xrightarrow{*} \lambda^+ - \lambda^- \implies \mu = \lambda^+ - \lambda^-$
$|\mu_n| \xrightarrow{*} \lambda^+ + \lambda^- \implies \lambda = \lambda^+ + \lambda^-$
$|\mu| = |\lambda^+ - \lambda^-| \leq \lambda^+ + \lambda^- = \lambda \implies M(\lambda) \geq M(|\mu|)$
Inoltre $|\mu_n| \xrightarrow{*} \lambda \implies M(\lambda) \overset{\text{Prop. 4}}{\leq} \liminf M(\mu_n) \overset{\text{hp.}}{=} M(\mu) \leq M(\lambda)$
$\implies M(\lambda) = M(\mu) \implies \lambda(X) = |\mu|(X) \implies \lambda = |\mu|$ $\square$

<u>Oss</u> Se $M(\mu_n) \leq C < +\infty$, allora, a meno di sottosuccessioni,
$\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ e $|\mu_n| \xrightarrow{*} \lambda$ per qualche μ, λ.

esempio $X=[0,1]$, $\mu_n=\delta_{\frac{1}{n}}-\delta_0 \longrightarrow 0$, $|\mu_n|=\delta_{\frac{1}{n}}+\delta_0$
$M(\mu_n)=2$, $M(\mu)=0$

> **proposizione 4** Se $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, allora $M(\mu)\leq \liminf_{n\to\infty} M(\mu_n)$.

DIMOSTRAZIONE
Esiste una sottosuccessione (n_k) t.c. $\liminf_{n\to\infty} M(\mu_n)=\lim_{k\to\infty} M(\mu_{n_k})$.
Passando ad un'ulteriore sottosuccessione, posso supporre che $|\mu_{n_k}| \xrightarrow{*} \lambda$. Allora
$$\liminf_{n\to\infty} M(\mu_n)=\lim_{k\to\infty} M(\mu_{n_k})=\lim_{k\to\infty} M(|\mu_{n_k}|)=\lim_{k\to\infty}|\mu_{n_k}|(X)= \underset{\text{Prop.1(b)}}{=} \lambda(X) \underset{\text{Prop.3}}{\geq} |\mu|(X)=M(\mu).$$
$\square$

esempio $X=[0,1]$, $\mu_n=\begin{cases}\delta_{\frac{1}{n}}-\delta_0 & \text{per } n \text{ pari}\\ 2\delta_{\frac{1}{n}}-2\delta_0 & \text{per } n \text{ dispari}\end{cases}$

Allora $\mu_n \xrightarrow{*} 0$, $M(\mu_n)=\begin{cases}2 & \text{per } n \text{ pari}\\ 4 & \text{per } n \text{ dispari}\end{cases}$ e $M(\mu)=0$.

> **proposizione 5** Supponiamo che $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, $|\mu_n| \xrightarrow{*} \lambda$.
> Allora per ogni $f: X\to\mathbb{R}$ Borel, limitata e con $\lambda(D(f))=0$, vale che
> $$\int_X f\,d\mu_n \longrightarrow \int_X f\,d\mu.$$
> In particolare, dato $E\in\mathcal{B}(X)$ t.c. $\lambda(\partial E)=0$, vale $\mu_n(E)\longrightarrow\mu(E)$.

DIMOSTRAZIONE (per $F=\mathbb{R}$)
Prendo $\mu_n^{\pm}$, $\lambda^{\pm}$ come nella dim. della Prop.3
Allora $\lambda(D(f))=0 \Longrightarrow \lambda^{\pm}(D(f))=0$
Per la Prop.1(e), $\int_X f\,d\mu_n^{\pm} \longrightarrow \int_X f\,d\mu^{\pm}$
da cui segue la tesi. $\square$

esempio $|\mu|(D(f))=0$ non basta
$X=[0,1]$, $\mu_n=\delta_{\frac{1}{n}}-\delta_0$, $E=\{0\}$
Allora $\mu_n \xrightarrow{*} 0$ quindi
$$|\mu|(\partial E)=|\mu|(\{0\})=0$$
ma $\mu_n(E)=\mu_n(\{0\})=1$ $\forall n$ mentre $\mu(E)=0$
Invece $|\mu_n|\longrightarrow 2\delta_0$ e quindi $\lambda(\partial E)=\lambda(\{0\})=2$

DEF. (μ_n) si dice tight (tesa) se
$\forall \varepsilon>0$ $\exists K$ compatto t.c. $|\mu_n|(X\setminus K)\leq\varepsilon$ $\forall n$

Def. Sia X metrico completo.
μ_n misure a valori reali finite su $\mathcal{B}(X)$
Dico che $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ se $\int_X f\,d\mu_n \longrightarrow \int_X f\,d\mu \quad \forall f \in C_b(X)$

Oss Questa definizione coincide con quella data in precedenza se X è compatto.
Non però se X è localmente compatto.
In particolare per $X=\mathbb{R}$, $\mu_n = \delta_n$, si ha che
$$\int_X f\,d\delta_n \longrightarrow 0 \qquad \forall f \in C_0(\mathbb{R})$$
ma questo non vale $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$, ad esempio per $f \equiv 1$.
Quindi $\mu_n \xrightarrow{*} 0$ nel senso degli spazi localmente compatti, ma non nel senso definito sopra.
La definizione precedente è resa interessante dal seguente Teorema di compattezza.

Teorema di Prokhorov Sia X metrico completo, (μ_n) successione di misure positive su $\mathcal{B}(X)$ t.c.
(a) (μ_n) è tesa;
(b) $\mathbb{M}(\mu_n) = \mu_n(X) \leq C < +\infty$.
Allora esiste (n_k) e μ t.c. $\mu_{n_k} \xrightarrow{*} \mu$ nel senso della def. precedente.

DIMOSTRAZIONE
Poiché le μ_n sono tese per (a), posso trovare una successione crescente di compatti K_m t.c.
$$\mu_n(X \setminus K_m) \leq 2^{-m} \quad \forall n \quad \forall m$$
Poiché le misure $(\mu_n \llcorner K_m)_n$ sono equilimitate in massa per (b), esiste (n_k) e μ^m misura su $\mathcal{B}(K_m)$ t.c. $\mu_n \llcorner K_m \xrightarrow[n\to\infty]{*} \mu^m$ su K_m.
Inoltre, per procedimento diagonale posso supporre che (n_k) sia la stessa $\forall m$.
Si vede che $\forall m' > m \quad \mu^{m'} \llcorner K_m = \mu^m$
Da questo segue che esiste μ misura su $\mathcal{B}(X)$ supportata su $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$ t.c. $\mu \llcorner K_m = \mu^m$ $\quad \left(\mu(E) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(E) = \sup_n \mu_n(E) \right)$
Dimostro che $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$.
Preliminarmente osservo che $\mu(X \setminus K_m) \leq 2^{-m} \quad \forall m \quad (a)$
Infatti $\forall m' > m$, $K_{m'} \setminus K_m$ è aperto in $K_{m'}$ e quindi Prop. 1 (c)
$$\mu(K_{m'} \setminus K_m) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(K_{m'} \setminus K_m) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(X \setminus K_m) \leq 2^{-m}$$
Quindi $\mu((\bigcup_{m'} K_{m'}) \setminus K_m) \leq 2^{-m}$ e siccome μ è supportata su $\bigcup_{m'} K_{m'}$, ho che $\mu(X \setminus K_m) \leq 2^{-m}$.
Sia ora $f \in C_b(X)$ e indico con $\|\cdot\|$ la norma del sup. Allora $\forall m$
- $\left| \int_{X \setminus K_m} f\,d\mu_n \right| \leq \|f\|\, \mu_n(X \setminus K_m) \leq \|f\| 2^{-m}$
- $\int_{K_m} f\,d\mu_n \longrightarrow \int_{K_m} f\,d\mu$ perché $\mu_n \llcorner K_m \xrightarrow{*} \mu \llcorner K_m$
- $\left| \int_{X \setminus K_m} f\,d\mu \right| \leq \|f\| 2^{-m}$ per (a)

Da questo segue che $\limsup_{n\to\infty} \left| \int_X f\,d\mu_n - \int_X f\,d\mu \right| \leq 2\|f\| 2^{-m}$
ed essendo m arbitrario, $\limsup_{n\to\infty} \left| \int_X f\,d\mu_n - \int_X f\,d\mu \right| = 0$, ovvero $\int_X f\,d\mu_n \longrightarrow \int_X f\,d\mu$ $\square$

Oss Se $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ nel senso della def. precedente, allora la Prop. 1 vale verbatim e la dimostrazione è la stessa.

COMPLEMENTI

Confronto Riemann-Lebesgue

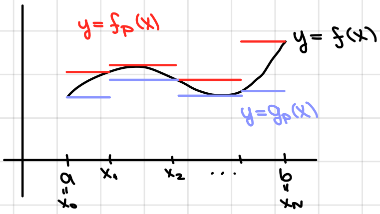
Teorema Sia $f: I=[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann. Allora f è misurabile secondo Lebesgue e
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\mathcal{L}^1.$$

<u>Oss</u> (1) Questo non vale per gli integrali impropri
$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ esiste come integrale improprio ma non come integrale secondo Lebesgue
(2) Lo stesso risultato vale in più variabili (integrale di Riemann-Peano-Jordan).

DIMOSTRAZIONE

Sia $P=\{x_0,\dots,x_N\}$ partizione di $[a,b]$.

Sia $f_P: I \longrightarrow \mathbb{R}$ data da
$$f_P(\bar{x}) := \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \qquad \forall \bar{x}\in[x_{i-1},x_i)$$
Sia $g_P: I \longrightarrow \mathbb{R}$ data da
$$g_P(\bar{x}) := \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \qquad \forall \bar{x}\in[x_{i-1},x_i)$$



Allora $g_P \le f \le f_P$ (funzione semplice e boreliana)
- $S^*(f,P) = \int_I f_P\,d\mathcal{L}^1$
- $S_*(f,P) = \int_I g_P\,d\mathcal{L}^1$

f integrabile $\iff \forall n\ \exists P_n$ t.c. $S^*(f,P_n) - S_*(f,P_n) \le \frac{1}{n}$
(e in tal caso $S^*(f,P_n), S_*(f,P_n) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$)

Pongo $f_n := f_{P_n}$, $g_n := g_{P_n}$; pongo $\bar{f}(x) := \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\bar{g}(x) := \limsup_{n\to+\infty} g_n(x)$.

Allora $\bar{f}$ e $\bar{g}$ sono boreliane ($\Rightarrow$ misurabili secondo Lebesgue).

Inoltre $g_n \le f \le f_n \implies \bar{g} \le f \le \bar{f}$

Infine $\int_I \bar{f}\,d\mathcal{L}^1 \underset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{n\to+\infty} \int_I f_n\,d\mathcal{L}^1 = \lim_{n\to+\infty} S^*(f,P_n) = \int_a^b f(x)dx =$
$= \lim_{n\to+\infty} S_*(f,P_n) = \limsup_{n\to+\infty} \int_I g_n\,d\mathcal{L}^1 \underset{\text{Fatou}}{\le} \int_I \bar{g}\,d\mathcal{L}^1$

Siccome $\int_I \bar{g}\,d\mathcal{L}^1 \le \int_I \bar{f}\,d\mathcal{L}^1$ perché $\bar{g} \le \bar{f}$, allora
$\int_I \bar{g}\,d\mathcal{L}^1 = \int_I \bar{f}\,d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x)dx$

Concludo con il Lemma che f è misurabile secondo Lebesgue e
$\int_I f\,d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x)dx$. □

Lemma Sia μ misura finita su $(X,\mathcal{M})$ e completa.
Siano $f_1,f_2,f_3: X \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.
(1) $f_1 \le f_2 \le f_3$
(2) f_1 e f_3 $\mathcal{M}$-misurabili
(3) $\int_X f_1\,d\mu = \int_X f_3\,d\mu < +\infty$
Allora f_2 è $\mathcal{M}$-misurabile e $\int_X f_2\,d\mu = \int_X f_1\,d\mu = \int_X f_3\,d\mu$.

DIMOSTRAZIONE

(c) $\Rightarrow \int_X \underbrace{f_3 - f_1}_{\ge 0}\,d\mu = 0 \implies f_3 - f_1 = 0$ μ-q.o.

$\implies \exists N \in \mathcal{M}$, N μ-nullo t.c. $f_1 = f_2 = f_3$ su $X \setminus N$

$\implies \forall B$ Borel in $\mathbb{R}$ $\quad f_2^{-1}(B) \cap (X\setminus N) = f_1^{-1}(B) \cap (X \setminus N)$

$\implies f_2^{-1}(B) \,\Delta\, \underbrace{f_1^{-1}(B)}_{\in\mathcal{M}} \subset N \implies f_2^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ per completezza. □

Domanda: f integrabile secondo Lebesgue $\Rightarrow$ f Borel?
Risposta: NO

Teorema Sia $f: I=[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e sia $D=D(f)=\{$punti di discontinuità di $f\}$. Allora
f è integrabile secondo Riemann $\iff \mathcal{L}^1(D)=0$.

DIMOSTRAZIONE

Preliminari $\forall \bar{x} \in I$ pongo
$$f^*(x) := \inf_{\delta>0}\Big(\sup_{|x-\bar{x}|\le\delta} f(x)\Big) = f(\bar{x}) \vee \limsup_{x\to\bar{x}} f(x)$$
$$f_*(x) := \sup_{\delta>0}\Big(\inf_{|x-\bar{x}|\le\delta} f(x)\Big) = f(\bar{x}) \wedge \liminf_{x\to\bar{x}} f(x)$$
Allora

(A) $f_*(\bar{x}) \le f(\bar{x}) \le f^*(\bar{x})$ e f è continua in $\bar{x}$ sse $f^*(\bar{x})=f_*(\bar{x})$

(B) Dato $s>0$, pongo $D_s := \{\bar{x}\in I \mid f^*(\bar{x})-f_*(\bar{x}) \ge s\}$
Allora $D_s \subset D$ è chiuso (quindi compatto) e $D=\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$

(C) Se $s > f^*(\bar{x})-f_*(\bar{x})$ (cioè $\bar{x}\notin D_s$) allora esiste $\delta=\delta(\bar{x})$ t.c. $\mathrm{osc}(f,[\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta]) \le s$

($\Leftarrow$) Fisso $\varepsilon>0$ e costruisco P partizione di I t.c. $S^*(f,P)-S_*(f,P)\le\varepsilon$.
Per (A), $D_\varepsilon \subset D$ inoltre $\mathcal{L}^1(D)=0 \Rightarrow \mathcal{L}^1(D_\varepsilon)=0$
$\Rightarrow$ esiste un ricoprimento numerabile di D_ε con intervalli aperti con somma delle lunghezze $\le\varepsilon$
Inoltre, per (B), D_ε è compatto, quindi D_ε si ricopre con finiti intervalli aperti $I_1,\dots,I_m$ con somma lunghezze $\le\varepsilon$.
Per (C), $\forall \bar{x}\notin D_\varepsilon$ esiste $\delta=\delta(\bar{x})$ t.c. $\mathrm{osc}(f,[\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta])\le\varepsilon$.
Gli intervalli aperti $J_{\bar{x}} := (\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta)$ ricoprono $I\setminus D_\varepsilon$ e quindi anche il compatto $K := I\setminus(I_1\cup\dots\cup I_m)$
Quindi K si ricopre con una famiglia finita di intervalli $J_1=J(\bar{x}_1),\dots,J_{m'}=J(\bar{x}_{m'})$.
In conclusione $\{I_i\}\cup\{J_j\}$ è un ricoprimento finito di I di intervalli aperti

(D) Esiste $P=\{x_0,\dots,x_N\}$ partizione di I t.c. posso scegliere gli indici $\{1,\dots,N\}$ come unione di due famiglie disgiunte H' e H'' t.c.
$\forall i\in H'$ $[x_{i-1},x_i]\subset I_j$ per qualche j,
$\forall i\in H''$ $[x_{i-1},x_i]\subset J_j$ per qualche j
Ma allora
$$S^*(f,P)-S_*(f,P)=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{osc}(f,[x_{i-1},x_i])\,(x_i-x_{i-1})=$$
$$=\sum_{i\in H'}\mathrm{osc}(f,[x_{i-1},x_i])(x_i-x_{i-1})+\sum_{i\in H''}\mathrm{osc}(f,[x_{i-1},x_i])\,(x_i-x_{i-1}) \le$$
$$\le \sum_{i\in H'}\mathrm{osc}(f)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i\in H''}\varepsilon(x_i-x_{i-1}) \le \mathrm{osc}(f)\varepsilon+\varepsilon(b-a)=\varepsilon(\mathrm{osc}(f)+b-a).$$

($\Rightarrow$) Fisso $\varepsilon>0, s>0$; f integrabile $\Rightarrow \exists P=\{x_0,\dots,x_N\}$ t.c.
$$\varepsilon \ge S^*(f,P)-S_*(f,P)=\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\mathrm{osc}(f,[x_{i-1},x_i])}_{a_i}(x_i-x_{i-1}) \ge s\cdot\sum_{i\in H}(x_i-x_{i-1})$$
dove $H:=\{i \mid a_i\ge s\}$

(E) Detto $C=\bigcup_{i\in H}[x_{i-1},x_i]$, per ogni $\bar{x}\in I\setminus C$ vale $f^*(\bar{x})-f_*(\bar{x})<s$, cioè $C\supset D_s$.
Quindi $\mathcal{L}^1(D_s)\le\mathcal{L}^1(C)\le\frac{\varepsilon}{s}$
Per l'arbitrarietà di ε, $\mathcal{L}^1(D_s)=0$.
Siccome $D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$, $\mathcal{L}^1(D)=0$. $\square$

EX f Riemann-integrabile non Boreliana
f derivabile t.c. f' è limitata ma non Riemann-integrabile
f Riemann-integrabile t.c. $D=D(f)$ non ha "misura di R. nulla"

Teorema di Riesz

Considero $p,q \in [1,+\infty]$ esponenti coniugati $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$
$\mathcal{M}$ σ-algebra su X, μ misura positiva su $\mathcal{M}$
Date $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$ vale Hölder : $\int_X |fg| \, d\mu \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$
In particolare, $\int_X fg \, d\mu$ è ben definito e finito.
Considero $T_g : L^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $T_g(f) := \int_X fg \, d\mu$
T_g è lineare e continuo : $|T_g(f)| \le \int_X |fg| \, d\mu \le \|g\|_{L^q} \|f\|_{L^p}$
In particolare $\|T_g\| \le \|g\|_{L^q}$

Proposizione Se $1<p\le\infty$, allora $\|T_g\| = \|g\|_{L^q}$, cioè
l'applicazione $L^q(\mu) \ni g \longmapsto T_g \in (L^p(\mu))^*$
è un'immersione lineare isometrica di $L^q(\mu)$ in $(L^p(\mu))^*$.

DIMOSTRAZIONE
Se $g=0$ q.o. allora $T_g=0$ e l'identità è vera.
Suppongo g non q.o. nulla e pongo $\alpha = \frac{1}{\|g\|_{L^q}^{q-1}}$

$$e \quad f(x) := \begin{cases} \alpha\, |g(x)|^{q-1} & \text{se } g(x) \ge 0 \\ -\alpha\, |g(x)|^{q-1} & \text{se } g(x) < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(g(x))\, \alpha\, |g(x)|^{q-1}$$

per $p=\infty$ va fatto un conto separato

Allora $\|f\|_{L^p} = \alpha \left(\int_X |g(x)|^{(q-1)p} \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \alpha \|g\|_{L^q}^{q-1} = 1$
$|T_g(f)| = \left| \int_X \alpha |g(x)|^q \, d\mu(x) \right| = \alpha \|g\|_{L^q}^q = \|g\|_{L^q}$ $\square$

<u>Oss</u> Per $p=1$ l'enunciato non è vero.
Per la precisione, data una misura μ che assume solo i valori 0 e $+\infty$, (per esempio $\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E=\emptyset \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$) allora la funzione $g=1$ appartiene a $L^q = L^\infty$ e $\|g\|_{L^\infty}=1$, ma L^p contiene solo la funzione 0 e quindi $T_g=0 \Rightarrow \|T_g\|=0$.
Tuttavia l'enunciato è vero se si assume che μ abbia la seguente proprietà:
$\forall E \in \mathcal{M}$ t.c. $\mu(E)=+\infty$, esiste $E' \in \mathcal{M}$, $E' \subset E$ t.c. $0<\mu(E')<+\infty$.
In particolare, questa proprietà è verificata da ogni μ σ-finita.

Teorema di Riesz Sia $1 \le p < +\infty$ e μ σ-finita.
Sia $T : L^p \longrightarrow \mathbb{R}$ funzionale lineare e continuo
Allora esiste $g \in L^q$ t.c. $T = T_g$.
In particolare, l'applicazione $I. \, g \in L^q \longrightarrow T_g \in (L^p)^*$
è un'isometria lineare di L^q su $(L^p)^*$.

DIMOSTRAZIONE (per μ finita)
L'idea per costruire g è usare il Teorema di Radon-Nikodym.
Considero $\lambda(E) := T(\mathbb{1}_E)$ $\quad$ ($\mathbb{1}_E \in L^p$ perché μ finita)

<u>Passo 1</u> λ è una misura (a valori reali)

Sia $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$ disgiunta con $E := \bigcup_n E_n \implies \mathbb{1}_E(x) = \sum_n \mathbb{1}_{E_n}(x) \ \forall x \in X$

Inoltre la serie converge in L^p:

$$\| \mathbb{1}_E - \sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{E_n} \|_{L^p}^p = \mu\Big(\bigcup_{n=N+1}^{+\infty} E_n\Big) \searrow 0$$

$$\implies \sum_{n=0}^{N} \lambda(E_n) = \sum_{n=0}^{N} T(\mathbb{1}_{E_n}) = T\Big(\sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{E_n}\Big) \longrightarrow T(E) = \lambda(E)$$

<u>Passo 2</u> $\lambda \ll \mu \implies \lambda = g\mu$ con $g \in L^1(\mu)$

$\mu(E) = 0 \implies \mathbb{1}_E = 0$ q.o. $\implies T(\mathbb{1}_E) = T(0) = 0 \implies \lambda(E) = 0$

Poi si usa Radon-Nikodym (vale anche per λ a valori reali: $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-, \dots$):

$\exists g \in L^1$ t.c. $\lambda = g\mu$, ovvero $T(\mathbb{1}_E) = T_g(\mathbb{1}_E) \ \forall E \in \mathcal{M}$, ovvero

$T(f) = T_g(f) \quad \forall f$ semplice

<u>Passo 3</u> $g \in L^q(\mu)$

$\forall n$ pongo $E_n^+ := \{x \in X \mid 2^n \le g(x) < 2^{n+1}\}$

$E_n^- := \{x \in X \mid 2^n \le -g(x) < 2^{n+1}\}$

$\forall N$ pongo $F_N := \Big[\bigcup_{n=0}^{N} (E_n^+ \cup E_n^-)\Big] \cup \{x : |g(x)| < 1\} = \{x : |g(x)| < 2^{N+1}\}$

e $g_N := g \cdot \mathbb{1}_{F_N}$, $f_N := \sum_{n=0}^{N} 2^{(q-1)n} (\mathbb{1}_{E_n^+} - \mathbb{1}_{E_n^-})$

Ora $\|f_N\|_{L^p}^p = \sum_{n=0}^{N} 2^{nq} (\mu(E_n^+) + \mu(E_n^-)) \le \int_{F_N} |g(x)|^q \, d\mu(x) = \|g_N\|_{L^q}^q$

D'altronde $\|g_N\|_{L^q}^q = \int_{F_N} |g(x)|^q \, d\mu(x) \underset{\substack{\uparrow \\ |g(x)|^q \le 1 + 2^q f_N g \ \forall x \in F_N}}{\le} \int_X 1 + 2^q f_N \cdot g \, d\mu = \mu(X) + 2^q T_g(f_N) =$

$= \mu(X) + 2^q T(f_N) \le \mu(X) + 2^q \|T\| \, \|f_N\|_{L^p} \le \mu(X) + 2^q \|T\| \, \|g_N\|_{L^q}^{\frac{q}{p}} = \mu(X) + 2^q \|T\| \, \|g_N\|_{L^q}^{q-1}$

Quindi $\|g_N\|_{L^q}^q \le \mu(X) + 2^q \|T\| \, \|g_N\|_{L^q}^{q-1}$

ovvero $\|g_N\|_{L^q} \le \dfrac{\mu(X)}{\|g_N\|_{L^q}^{q-1}} + 2^q \|T\|$

Siccome $F_N \uparrow X$ per $N \to +\infty$, ho che $\|g_N\|_{L^q} \uparrow \|g\|_{L^q}$ e quindi passando al limite $\|g\|_{L^q} \le \dfrac{\mu(X)}{\|g\|_{L^q}^{q-1}} + 2^q \|T\| < +\infty$, ovvero $g \in L^q$

<u>Passo 4</u> $T_g = T$

$T_g(f) = T(f) \ \forall f$ indicatrice, quindi $\forall f \in \mathrm{Span}(\{\text{indicatrici}\})$

e allora $\forall f \in \overline{\mathrm{Span}(\{\text{indicatrici}\})} = L^p$

$\square$

<u>Oss</u> (1) La dimostrazione è scritta per il caso $1 < p < +\infty$.

(2) <u>Caso μ σ-finita</u>

- Prendo $\{X_n\} \subset \mathcal{M}$ disgiunti t.c. $\mu(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n) = 0$
- Per ogni n esiste $g_n \in L^q(X_n)$ t.c. $T(f) = \int_X f g_n \, d\mu$
  $\forall f \in L^p(X)$ t.c. $f = 0$ μ-q.o. in $X \setminus X_n$
- Prendo $g(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{se } x \in X_n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
  Allora $g \in L^q(X)$ e $T(f) = \int_X f g \, d\mu \ \ \forall f \in L^p(X)$ t.c.
  $f = 0$ μ-q.o. in $X \setminus \bigcup_{n=0}^{N} X_n$ per qualche N
- Poiché tale classe è densa in L^p, ho che $T = T_g$.

(3) Si può dimostrare che il Teorema vale anche per μ non σ-finita nel caso $1 < p < +\infty$.

Il punto chiave è far vedere che

| dato $T \in (L^p)^*$ esiste $\tilde{X}$ insieme σ-finito rispetto a μ (dipendente da T)
| t.c. $T(f) = 0 \quad \forall f$ t.c. $f = 0$ μ-q.o. su $\tilde{X}$

e poi ci si riconduce al caso σ-finito.

DIMOSTRAZIONE (traccia)

$\forall E \in \mathcal{M}$ sia T_E la restrizione di T a $L^p(E)$. Siano inoltre $E_1, \dots, E_N$ insiemi disgiunti t.c. $\|T_{E_i}\| \ge \delta$. Allora $N \le (\|T\|/\delta)^q$.

(4) In generale il Teorema non vale se $p=1$ e μ non è σ-finita.

esempio Sia $X=[0,1]$, $\mathcal{M}=\mathcal{B}(X)$, μ misura che conta i punti

Sia $g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ una qualsiasi funzione limitata, $|g(x)|\le L$ $\forall x$

Sia $T: L^1(\mu)\longrightarrow\mathbb{R}$ data da

$$T(f):=\sum_{x\in[0,1]} f(x)\cdot g(x)$$

T è ben definito perché $f=0$ tranne che per una quantità numerabile di x

Inoltre T è lineare e continuo: $|T(f)|\le L\|f\|_{L^1}$

Tuttavia, se g non è Boreliana, non è possibile trovare $\tilde{g}$ Boreliana t.c. $T=T_{\tilde{g}}$.

(5) Il Teorema non vale se $p=+\infty$ (tranne che per misure μ particolarmente semplici, come le combinazioni lineari di delte)

esempio $X=[0,1]$, $\mathcal{M}=\mathcal{B}(X)$, μ = qualunque misura finita su $\mathcal{B}(X)$ t.c. $\mu(\{0\})=0$ e $\text{supp}(\mu)=X$.

Sia $T: C(X)\longrightarrow\mathbb{R}$ data da $T(f):=f(0)$

Allora $|T(f)|=|f(0)|\le\|f\|_{C(X)}=\|f\|_{L^\infty}$

Quindi T è continuo su $C(X)$ visto come sottospazio di $L^\infty(\mu)$.

Ma allora T ammette un'estensione continua a tutto $L^\infty(\mu)$ (Teorema di Hahn-Banach).

Si vede che $T\ne T_g$ $\forall g\in L^1(\mu)$.

(6) Una conseguenza è il seguente teorema di compattezza, analogo al teorema di compattezza per le misure.

Teorema Sia μ σ-finita, $1<q\le\infty$, (g_n) una successione in $L^q(\mu)$ t.c. $\|g_n\|_{L^q}\le C<+\infty$.

Allora esiste (n_k) sottosuccessione e $g\in L^q(\mu)$ tali che

$$\int_X g_n f\,d\mu\longrightarrow\int_X g f\,d\mu\quad\forall f\in L^p(\mu).$$

In breve, scrivo $g_n\longrightarrow g$ in L^q-debole (L^∞-debole$*$ se $q=\infty$).

Push-forward di misure

Siano $\mathcal{M}$ σ-algebra su X, $\mathcal{M}'$ σ-algebra su X'
$f: X \to X'$ $(\mathcal{M},\mathcal{M}')$-misurabile, nel senso $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ $\forall E \in \mathcal{M}'$
Data allora μ misura su $\mathcal{M}$, posso definire μ' misura su $\mathcal{M}'$ definendo
$$\mu'(E') := \mu(f^{-1}(E')) \quad \forall E' \in \mathcal{M}'$$
Questa misura è detta immagine di μ secondo f o push-forward di μ secondo f ed è indicata con $f_\# \mu$.

EX (1) Dimostrare che $f_\#\mu$ è una misura
(2) Dimostrare che $\forall g: X \to [0,+\infty]$ misurabile
$$\int_{X'} g \, d(f_\#\mu) = \int_X g(f(x)) \, d\mu(x)$$
e lo stesso vale per $g: X' \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e integrabile.
(3) Sia $X=[a,b]$, $\mathcal{M}=\{\text{mis. secondo Leb}\}$, $X'=[a',b']$, $\mathcal{M}'=\{\text{mis. secondo Leb.}\}$
$f:[a,b] \to [a',b']$ di classe C^1 con inversa C^1.
Far vedere che f è misurabile nel senso specificato sopra e determinare $f_\#\mu$ dove μ è la misura di Lebesgue su $[a,b]$.
(4) Far vedere che se f è solo C^1, può non essere misurabile
(5) Estendere il risultato dell'ex.(3) al caso X, X' aperti di $\mathbb{R}^n$, $f: X \to X'$ C^1 con inversa C^1, μ misura di Leb.
(6) Siano X, X' aperti di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M} := \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{M}' = \mathcal{B}(X')$, $f: X \to X'$ di classe C^1, $\mu = g \cdot \mathcal{L}^n \llcorner X$ con $g: X \to [0,+\infty)$ Borel t.c. $g(x)=0$ se $\det(Df(x))=0$.
Allora f è Borel. Calcolare $f_\#\mu$.

Disintegrazione di misure

Siano X, Y spazi topologici, μ misura finita su $\mathcal{B}(X)$, $f: X \to Y$ Boreliana.
$\forall y \in Y$ sia $E_y := f^{-1}(y)$.
Supponiamo Y finito
Allora posso scomporre μ come segue:
$$\mu = \sum_{y \in Y} \mu \llcorner E_y = \sum_{y \in Y^*} \lambda(y) \cdot p_y$$
dove $Y^* = \{y : \mu(E_y) > 0\}$, $\lambda(y) := \mu(E_y)$,
$p_y := \frac{1}{\lambda(y)} \mu \llcorner E_y$ è una misura di probabilità

Oss Se μ è una misura di probabilità, allora p_y corrisponde alla probabilità condizionale ottenuta sapendo che f assume il valore y.
In particolare, la formula si riscrive $\mu(E) = \sum_{y \in Y^*} \lambda(y) \, p_y(E)$,
che coincide con la formula in probabilità $P(E) = \sum_{y \in Y^*} P(E \mid f=y) \cdot P(f=y)$

Problema estendere questa decomposizione al caso Y infinito (continuo)

L'estensione naturale che la somma (pesata con i coeff. $\lambda(y)$) diventi un integrale rispetto alla misura $\lambda = f_\#\mu$, mentre p_y è una misura di probabilità supportata su $E_y := f^{-1}(y)$ per λ-q.o. $y \in Y$.

Prendo X spazio topologico compatto.
Indico con $M(X)$ lo spazio di Banach delle misure a valori reali su $\mathcal{B}(X)$ e con $P(X)$ il sottoinsieme delle misure di probabilità.

Dico che la mappa $y \in Y \longmapsto p_y \in P(X)$ (oppure $M(X)$) è Boreliana (w^*-Borel) se è Boreliana avendo dotato $M(X)$ della topologia debole $*$, cioè se la funzione $y \longmapsto \int_X g\, dp_y$ è Boreliana (da Y in $\mathbb{R}$) per ogni $g \in C(X)$.
Ne segue che $y \longmapsto \int_X g\, dp_y$ è Boreliana anche per ogni $g = 1\!\!1_E$ con E Boreliano, quindi per ogni g semplice e infine per ogni $g : X \to [0,+\infty]$ Borel.
Data inoltre tale mappa $y \longmapsto p_y$ posso definire l'integrale rispetto ad una qualunque misura finita λ su $M(Y)$ come la misura $\mu \in M(X)$ data da

$$\mu(E) = \int_Y p_y(E)\, d\lambda(y) \quad \text{per ogni } E \in B(X).$$

In tal caso, vale anche $\int_X g\, d\mu = \int_Y \left(\int_X g\, dp_y\right) d\lambda(y)$ per ogni $g : X \to [0,+\infty]$ Borel.
Per semplicità, indico μ con $\mu = \int_Y p_y\, d\lambda(y)$

Teorema Sia X compatto, μ misura finita su $B(X)$, Y metrico, $f : X \to Y$ Boreliana. Sia $\lambda := f_\# \mu$.
Allora esiste una mappa $y \in Y \longmapsto p_y \in P(X)$ Boreliana t.c.

$$\mu = \int_Y p_y\, d\lambda(y)$$

e p_y è supportata su $E_y := f^{-1}(y)$ $\forall y \in Y$.
In particolare $\forall g : X \to [0,+\infty]$ Borel vale che

$$\int_X g\, d\mu = \int_Y \left(\int_X g\, dp_y\right) d\lambda(y).$$

DIMOSTRAZIONE (per f continua; altrimenti si usa Lusin)
Per $n = 0,1,2,\dots$ prendo $\{F_i^n\}_i$ partizione Boreliana finita di $f(X)$ compatto t.c.
- $\operatorname{diam}(F_i^n) \le 2^{-n}$ $\forall i$
- $\forall n\, \forall i\, \exists i'$ t.c. $F_i^n \subset F_{i'}^{n-1}$ (cioè $\{F_i^n\}$ è un raffinamento di $\{F_i^{n-1}\}$)

Pongo quindi $E_i^n := f^{-1}(F_i^n)$ $\forall n, i$. Quindi $\{E_i^n\}_i$ è una partizione Boreliana di X.
Pongo infine $p_i^n := \frac{1}{\mu(E_i^n)} \mu \llcorner E_i^n$ (ignoro gli i per cui $\mu(E_i^n) = 0$)
Allora $\mu = \sum_i \mu(E_i^n)\, p_i^n = \sum_i \lambda(F_i^n)\, p_i^n$
Considerando la mappa $\varphi_n : Y \to P(X)$ data da $\varphi_n(y) := p_i^n$ se $y \in F_i^n$, la formula diventa $\mu = \int_Y \varphi_n(y)\, d\lambda(y)$ e $\varphi_n(y) \in P(X)$ è supportata su E_i^n con $i = i(n,y)$ t.c. $y \in F_i^n$.
Voglio passare al limite per $n \to +\infty$.
Vedo φ_n come elemento di $L^\infty(\lambda, M(X))$ e osservo che $\|\varphi_n\|_{L^\infty} = 1$ $\forall n$.
Per il Teo. precedente, esiste (n_k) sottosucc. e $\varphi \in L^\infty(\lambda, M(X))$ t.c.

$$\varphi_{n_k} \longrightarrow \varphi \quad L^\infty\text{-debole}*$$

In teoria, il Teo. si applica a $L^\infty(\lambda)$ e non a $L^\infty(\lambda, M(X))$.
La versione precisa è questa: $\forall g \in C(X)$ pongo $\varphi_n^g(y) := \int_X g\, d\varphi_n(y)$ e osservo che $\|\varphi_n^g\|_{L^\infty} \le \|g\|$, e quindi esiste (n_k) t.c. $\varphi_{n_k}^g$ converge L^∞-debole $\forall g \in D$ numerabile denso in $C(X)$. Ma allora esiste φ t.c. $\varphi_{n_k}^g \longrightarrow \varphi^g$ L^∞-debole $\forall g \in D$ e quindi $\forall g \in C(X)$, ovvero $\int_Y \left(\int_X g\, d\varphi_{n_k}(y)\right) \rho(y)\, d\lambda(y) \longrightarrow \int_Y \left(\int_X g\, d\varphi(y)\right) \rho(y)\, d\lambda(y)$ $\forall g \in C(X)$ $\forall \rho \in L^1(\lambda)$.

In particolare, prendendo $\rho \equiv 1$, ottengo $\int_Y \left(\int_X g\, d\varphi_{n_k}(y)\right) d\lambda(y) \longrightarrow \int_Y \left(\int_X g\, d\varphi(y)\right) d\lambda(y)$ $\forall g$, ossia $\int_X g\, d\mu = \int_Y \left(\int_X g\, d\varphi(y)\right) d\lambda(y)$ $\forall g$ ovvero $\mu = \int_Y p_y\, d\lambda(y)$ con $p_y := \varphi(y)$.
Per concludere, si deve dimostrare che:
(a) p_y è effettivamente una misura di probabilità per λ-q.o. y
(b) p_y è supportata su E_y.

Per (b), si osserva che $\varphi_n(y)$ è supportata su E_i^n con $i = i(n,y)$ t.c. $y \in F_i^n$. Per la scelta degli E_i^n, segue che $\varphi_m(y)$ è supportata su $E_{i(n,y)}^n$ $\forall m \ge n$ e quindi $\varphi(y)$ è supportata su $E_{i(n,y)}^n$ per λ-q.o. y e per ogni n. Infine $\varphi(y) = p_y$ è supportata per λ-q.o. y su $\bigcap_{n=0}^{\infty} E_{i(n,y)}^n$ che coincide con E_y. $\square$